EXERCICE N°1

On considère la suite réelle u définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1 \end{cases}$

1°) Montrer que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.
2°) Montrer que , pour tout n de N : $1 \le u_n \le 2$
3°) Montrer que u est croissante sur N.
4°)Soit pour tout n de N : $v_n = u_n - a$

- *a) Déterminer a pour que la suite (v_n) soit géométrique.*
- *b) Exprimer alors* u_n *en fonction de n.*
- *c) Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

5°)Soit $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *. Exprimer* s_n *en fonction de n.*

EXERCICE N°2

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ *et* $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

1°) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2°) Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que w est une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3°)Etudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
4°)Montrer que (u_n) est majoré par 4 et (v_n) est minoré par 3.
5°) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.
6°)En déduire u_n et v_n en fonction de n.
7°)Calculer alors la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE N°3

On considère la suite réelle u définie sur N par : $\begin{cases} u_0 \in R \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + a}{u_n + 1} \end{cases}$

Parti I. Dans cette partie on prend $u_0 = 1$ *et* $a = 0$
1°) Montrer que , pour tout n de N : $u_n > 0$
2°)Soit pour tout n de N : $w_n = \dfrac{1}{u_n}$.

- *a) Montrer que w est une arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison*
- *b) Exprimer alors* u_n *en fonction de n.*

Partie II.Dans cette partie on prend $u_0 = 0$ *et* $a = \dfrac{1}{4}$

1°) Montrer que , pour tout n de N : $0 \le u_n < \dfrac{1}{2}$
2°)Etudier la monotonie de u.
3°)Soit pour tout n de N : $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{2u_n - 1}$.

- *a) Montrer que v est suite une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison*
- *b) Exprimer alors* u_n *en fonction de n.*
- *c) Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°4

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in N$ par : $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$

1°) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

2°) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$.

- *a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique*
- *b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.*

EXERCICE N°5

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} \end{cases}$ *, $n \in N$*

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Soit la fonction h définie sur $[0; 5]$ par : $h(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$

- *a) Étudier les variations de h.*
- *b) Résoudre l'équation $h(x) = x$.*
- *c) Tracer la courbe (H) représentative de h et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).*

3°) a) Construire à l'aide de (H) et de (Δ) les points de $(O;\vec{i})$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 en expliquant leur construction.

- *b) Que peut-on supposer pour la monotonie et la convergence de (u_n) ?*
- *c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1\leq u_n \leq 4$.*

4°) On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

- *a) Calculer v_0 et v_1.*
- *b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.*
- *c) Exprimer alors u_n en fonction de n.*
- *d) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$*

EXERCICE N°6

On considère la suite réelle u définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}$

1°)Montrer que , pour tout n de N : $0 \leq u_n \leq 4$

2°) Etudier la monotonie de u.

3°) Montrer que , pour tout n de N : $|u_{n+1} - 4| \leq \dfrac{3}{4}|u_n - 4|$

4°)En déduire que pour tout n de N : $4 - 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \leq u_n \leq 4$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5°)Soit pour tout n de N : $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que pour tout n de N : $4 + \dfrac{12}{n}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \dfrac{12}{n} \leq \dfrac{s_n}{n} \leq 4 + \dfrac{4}{n}$*

Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

EXERCICE °7

Soit la suite (u_n) définie sur N par :* $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$

1°) Démontrer, en raisonnant par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 3.

2°) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

3°) On considère la suite (v_n) définie sur N par : $v_n = n(3 - u_n)$.*

- *a) Prouver que cette suite est géométrique.*
- *b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.*

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°8

Pour tout réel k > 0, on définie la fonction f_k sur R^* par : $f_k(x) = 1 + \dfrac{k}{x}$

1°) Démontrer que l'équation $f_k(x) = x$ admet deux solutions α et β tels que : $\alpha < 0 < \beta$.

2°) On définit la suite (x_n) par : $\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = f_k(x_n) = 1 + \dfrac{k}{u_n} \end{cases}$ *pour tout entier naturel n.*

a) Justifier que x_n est défini pour tout entier naturel n.

b) On définit la suite (u_n) par : $u_n = \dfrac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$ *pour tout entier n.*

Justifier que u_n est défini pour tout entier n.

c) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

En déduire l'expression de u_n puis de x_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de (x_n). En déduire la valeur des expressions suivantes :

$$A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \quad \text{et} \quad B = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \ldots}}}$$

EXERCICE N°9

On se propose d'étudier l'existence et les propriétés de la suite (u_n) définie par la donnée d'un réel u_0 et la relation pour tout $n \in N$: $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 - u_n}{2}}$

1°) a) Démontrer par récurrence que quelque soit $u_0 \in [-1; 1]$ on a : $u_n \in [-1; 1]$ pour tout $n \in N$.

b) Déterminer u_0 de sorte que la suite (u_n) soit constante.

2°) Dans la suite de l'énoncé, on posera $u_0 = \sin\alpha_0$, avec : $\alpha_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{6}$?

b) Établir l'égalité, pour tout $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{2}} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

On suppose que pour tout $n \in N$ il existe un unique $\alpha_n \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \sin\alpha_n$.

Quelle relation y a-t-il entre α_n et α_{n+1} ?

c) On considère la suite (β_n) de terme général vérifiant : $\beta_n = \alpha_n - \dfrac{\pi}{6}$.

Montrer que cette suite est une suite géométrique. En déduire α_n puis u_n en fonction de n et de α_0.

La suite (u_n) a-t-elle une limite? Si oui, quelle est-elle ?

EXERCICE N°10

On considère la suite de terme général u_n telle que : $u_1 = \dfrac{3}{2}$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, $n \in N^*$

1°) Montrer que pour tout n, $u_n > 0$.

2°) Résoudre dans R l'équation : $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$*.Que peut-on en déduire ?*

3°) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{u_n}$ *..En déduire que, pour tout n, $u_n > \sqrt{2}$.*

4°) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *.En déduire que, pour tout n,* $u_n - \sqrt{2} \le \dfrac{1}{2^n}$

(on pourra faire une démonstration par récurrence).

5°) (u_n) admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui, la calculer.

EXERCICE N°11

On considère les polynômes U_n de la variable réelle x, tels que:

$$\begin{cases} U_0(x) = 2 \ , U_1(x) = x + \dfrac{1}{2} \\ \forall n \geq 1 : U_n(x) = \left(x + \dfrac{1}{2} \right) U_{n-1}(x) - \dfrac{1}{16} U_{n-2}(x) \end{cases}$$

1°) Former $U_2(x)$, $U_3(x)$ et $U_4(x)$.

2°) Démontrer,par récurrence, que pour tout entier n, le polynôme U_n est de degré n, et donner l'expression de son terme de plus haut degré.

3°) On suppose : $-1 \leq x \leq 0$, et on pose : $x = -\cos^2\alpha$.

Etablir la relation : $U_n(-\cos^2\alpha) = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cos(2n\alpha)$

4°)En déduire l'expression de $\cos(6\alpha)$ et de $\cos(8\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$.

EXERCICE N°12

On considère la suite réelle u définie sur N par : $r_1 = 2r_0 = 2$ *et pour tout n de N :* $r_{n+2} = \dfrac{4n+7}{2n+3} r_{n+1} - \dfrac{2n+2}{2n+1} r_n$

1°) Soit pour tout n de N : $a_n = r_{n+1} - \dfrac{2n+2}{2n+1} r_n$. *Montrer que a est une suite constante.*

2°)Etablir alors que pour tout n de N : $r_n = \dfrac{4^n}{C_{2n}^n}$