Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Association Tunisienne de Compétitions et de Culture Mathématiques

الجمعية التونسية لمسابقات و ثقافة الرياضيات

ATCCM

Camp d'hiver II

Préparation aux Compétitions Mathématiques

28 , 29 et 30/01/2018

Hôtel Riviera** KANTAOUI-SOUSSE**

Ali AKIR

Mes interventions en olympiades mathématiques

Sommaire

Email : atccm@laposte.net ****** BP. 352 - 1004 El Menzeh1.Tunis.**
Tél.: 95 563 444 **Site web: competitionmaths.net**
Association Tunisienne de Compétitions et de Culture Mathématiques
CCB : 05502000017546741622. (Banque de Tunisie)

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

I-ARITHMETIQUES

DEFINITION : DIVISEURS ET MULTIPLES D'ENTIERS

Soient $a,b\in\mathbb{Z}$. S'il existe un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=kb$, alors on dit que :

« a est un multiple de b », « b est un diviseur de a », « a est divisible par b », « b divise a », ce qui est noté $b|a$

Remarque :

- **ZERO** est un multiple de tous les entiers alors que **UN** les divise tous.

PROPRIETES : Soient $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

1- Si $c|b$ et $b|a$, alors $c|a$.

2- Si $c|b$ alors $ca|ba$.

3- Si $b|a$ et $d|c$, alors $bd|ac$ en particulier, si $b|a$, alors $b^k|a^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

4- Si $d|a$ et $d|b$, alors d divise $a+b$, $a-b$ et plus généralement $au+bv$ pour tous entiers relatifs u et v.

5- Si $a|b$ et $b|a$ alors $|a|=|b|$.

6- Si $a|b$ et $b\neq 0$, alors $|a|\leq|b|$.

DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{Z}$

Théorème : Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a=bq+r\text{, avec } 0\leq r<|b|.$$

a s'appelle le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste**.

Exemples

- La division euclidienne de 223 par 11 correspond à : ____________________
- La division euclidienne de -223 par 11 correspond à : ____________________
- La division euclidienne de 223 par -11 correspond à : ____________________
- La division euclidienne de -223 par -11 correspond à : ____________________

LES NOMBRES PREMIERS

Un nombre premier est un entier p strictement plus grand que 1, dont les seules diviseurs sont $\{-1,1,-p,p\}$.

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97$

PGCD DE DEUX ENTIERS

Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, avec $(a,b)\neq(0,0)$. On appel PLUS GRAND COMMUN DIVIEUR (ou PGCD) de a et b et on note $a\wedge b$ le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de a et b.

Exemple : $12\wedge 8=4$ et $18\wedge 24=6$

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

PROPRIETES : $\forall a,b \in \mathbb{Z}$,

- $PGCD(a,b) = PGCD(b,a) = PGCD(|a|,|b|)$
- $1 \leq PGCD(a,b) \leq \min(|a|,|b|)$
- Si $a|b$ alors $a \wedge b = |a|$
- $1 \wedge a = 1$ et $0 \wedge a = |a|$
- $\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ PGCD(ka,kb) = |k| PGCD(a,b)$
- $PGCD\left(\frac{a}{a \wedge b}, \frac{b}{a \wedge b}\right) = 1$
- Si $d = PGCD(a,b)$ e alors il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$, tel que $a = da'$ et $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$
- $\forall \lambda \in \mathbb{Z},\ PGCD(a,b) = PGCD(a, b - \lambda a)$.

THEOREME ET CONSEQUENCES DE GAUSS

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}$,

- Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a|c$
- Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge bc = 1$
- Si $b \wedge c = 1$, $b|a$ et $c|a$ alors $bc|a$
- Si p est un nombre premier, si $p|bc$ alors $p|b$ ou $p|c$

PPCM DE DEUX ENTIERS

Soient $a,b,c \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On appel PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE (ou PPCM) de a et b et on note $a \vee b$ le plus petit élément de l'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et b .

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

II-Exercices ARITHMETIQUES

Exercice 1D: Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x,y) tels que : $x^2-3xy=10$.

Exercice 2D : Déterminer tous les entiers relatifs n tels que :

i- $(n-1)$ divise $(n+4)$.

ii- $\dfrac{n^2+1}{n+1}$ est un entier relatifs.

Exercice 3 D: Soit n un entier naturel et $a=n^2+2n+3$ et $b=2n^2+4n+25$

Déterminer une condition sur les diviseurs positifs communs à a et b .

Exercice 4D: Montrer que si le nombre $n-2$ ($n\in\mathbb{Z}$) est un multiple de 3, alors n^2-1 l'est aussi.

Exercice 5 D: Calculer pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$(21n+4)\wedge(14n+3)$, $(3n+1)\wedge(2n+3)$ et $(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13)$

Exercice 6 D: Soient x et y deux entiers naturels tels que $2^x\times3^y=1296$, quelles est la valeur de $x+y$.

Exercice 7D : Trouver tous les couples d'entiers naturels $a,b\in\mathbb{N}$, tels que $a\wedge b=36$ et $a+b=360$.

Exercice 8 D: Trouver tous les couples d'entiers naturels $a,b\in\mathbb{N}$, tels que $a\wedge b=5$ et $ab=30$.

Exercice 9M : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : $(E_1):\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{7}$, $(E_2): x^2-y^2-6x+4y+1=0$

Exercice 10A : On appelle nombre de FERMAT, les entiers de la forme : $F_n=2^{2^n}+1$, $n\in\mathbb{N}$

Montrer que deux nombres de FERMAT distincts sont premiers entre eux.

Exercice 11M : Soit p un nombre premier .

i- Montrer que pout tout $k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise C_p^k .

ii- En déduire **le petit théorème de FEMAT** : $\forall n\in\mathbb{Z},\ p\,|\,n^p-n$

Exercice 12M : Soit $n\in\mathbb{N}$, Montrer que si 2^n-1 est premier alors n est premier .

Exercice 13M : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Montrer que $2^{2n+1}+1$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 14M : Trouver tous les nombres premiers p tels que 2^p+p^2 est aussi un nombre premier.

Exercice 15M : Soit p un nombre premier. Montrer que si le nombre $8p^2+1$ est premier alors $8p^2-1$ est aussi.

Exercice 16M : Montrer que le nombre n^4-n^2+16 avec $n\in\mathbb{N}$ est composé.

Exercice 17M : Montrer que $\forall n,k\in\mathbb{N}^*$ le nombre n^4+4k^4 est composé.

Exercice 18A : On définit les entiers a_n,b_n par $a_n+\sqrt{2}\,b_n=(1+\sqrt{2})^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\wedge b_n=1$

Exercice 19M : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, 9 divise $2^{2n}+6n-1$.

Exercice 20M : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, 121 ne divise pas n^2+3n+5.

Exercice 21M : Montrer que si p et p^2+2 sont des nombres premiers, alors p^3+2 est aussi nombre premier.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Exercice 22M **:** Soit $p>3$ un nombre premier. Montrer que 24 divise p^2-1 .

Exercice 23M **:** Existe t-il un nombre premier p tel que $16p+1$ est le cube d'un entier positif.

Exercice 24M **:** Trouver tous les entiers naturels n et x tel que $1+5\times 2^n = x^2$.

Exercice 25M **:** Trouver tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que $a\wedge b=1$ et $\frac{a}{b}+\frac{14b}{9a}$ est un nombre entier.

Exercice 26M **« Concours National 2012 »:** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit p un entier premier tel que n divise $p-1$ et p divise n^3-1.

Prouver que $4p-3$ est un carré parfait.

Exercice 27A **« IMO 98 »:** Trouver tous les couples (a,b) strictement positif tels que :

$$ab^2+b+7 \text{ divise } a^2b+a+b$$

Exercice 28A **« IMO 79 »:** Soit p et q deux entiers naturels non nuls vérifiant : $\frac{p}{q}=\sum_{k=1}^{1319}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Montrer que 1979 divise p

Exercice 29A **« IMO 2007 »:** Soit a et b deux entiers strictement positifs.

Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a=b$.

Exercice 30A **« IMO 2005 »:** On considère la suite $a_1, a_2, \ldots$ définie par :

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (\text{ n }=1 , 2 ,\ldots)$$

Trouver tous les entiers strictement positifs qui sont premiers avec chaque terme de la suite.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

III-Exercices INEGALIES

Exercice n°1 D

i- Montrer que pour tous réels a et b on a : $a^2+b^2 \geq 2ab$

ii- En déduire que pour tous réel x strictement positif : $x+\frac{1}{x} \geq 2$

Exercice n°2 D

i- Montrer que pour tous réels a et b positif : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ii- En déduire que, quels que soient les réels strictement positifs a,b et c : $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac} \geq \frac{2}{c}$

iii- Montrer alors que, quels que soient les réels strictement positifs a,b et c :

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Exercice n°3 D Montrer que pour tous réels a et b on a : $Max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ et $Min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$

Exercice n°4 D Montrer que, quels que soient les réels positifs a,b et c : $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$

Exercice n°5 D Montrer que, quels que soient les réels positifs a,b et c : $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Exercice n°6 D

i- Montrer que, quels que soient les réels positifs a,b et c : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

ii- En déduire que pour tous les réels positifs a,b et c : $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$

iii- En déduire que pour tous les réels strictement positifs a,b et c : $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$

Exercice n°7 D Soient x, y et z : des nombres réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$.

Montrer que : $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x} \geq 1.$

Exercice n°8 D Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

Montrer que : $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Exercice n°9 D Soient x, y et z des réels strictement positifs : Montrer que

i- $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$, ii- $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$.

Exercice n°10 M

Soit a, b, c, d des nombres positifs tels que $a+b+c+d=2$. Montrer que $ab+bc+cd+da \leq 1$.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Exercice n°11[M]

Démontrer l'inégalité de Nesbitt pour tous réels a,b et c strictement positifs : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

Exercice n°12[M]« Concours National 2012 »:

Soit a et b deux réels strictement positifs. On considère l'ensemble $M=\{ax+b(1-x);0<x<1\}$.

Montrer que : $\frac{2ab}{a+b}\in M$ et que $\sqrt{ab}\in M$

Exercice n°13[M]« Concours National 2010 »:

1- Montrer que, pour tout réel x strictement positifs, $x+\frac{1}{x}\geq 2$

2- Soient $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ des réels positifs tels que $x_0<x_1<x_2<...<x_n$.

Montrer que :

$$x_n+\frac{1}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_2-x_0}+\frac{1}{x_3-x_2}+...+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\geq 2n+x_0$$

Exercice n°14[M]« Concours National 2010 »: Montrer que si a,b et c sont trois réels tels que :

$abc=1$ et $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, alors l'un au moins de ces réels est égale à 1.

Exercice n°15[M]« Concours National 2007 »: Calculer $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$, sachant que a,b et c sont de réels tels que : $a+b+c=9$ et $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{4}{9}$.

Exercice n°16[M]« Concours National 1999 »: On pose pour x réel : $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$ où $a_0,a_1,.........,a_n$ sont des réels vérifiant : $0\leq a_i\leq a_0$ pour $i\in\{1,2,....,n\}$.

Soient $b_0,b_1,.........,b_{2n}$ tels que : $(f(x))^2=b_0+b_1x+....+b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}+.....+b_{2n}x^{2n}$.

Montrer que : $b_{n+1}\leq\frac{1}{2}[f(1)]^2$.

Exercice n°17[M]« Concours National 2000 »: Montrer que si a,b et c sont trois nombres rationnels distincts alors le nombre : $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ est le carré d'un nombre rationnel.

Exercice n°18[M]« Concours National 2006 »: Soit x,y et z des réels tel que $xyz=1$.

Calculer la valeur de l'expression : $\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$

Exercice n°19[M]« Concours National 2006 »: On désigne par $E(x)$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égale à x. Trouver tous les réels positifs x vérifiant l'équation :

$20[x-E(x)]+\frac{1}{2}E(x)=2006$.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

IV-GENERALITES SUR LES SUITES

1. GENERALITES SUR LES SUITES

Définition 1 : Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$.

On appelle suite réelle définie sur I toute application : $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u(n)$.

Vocabulaires

La suite se note u ou (u_n)ou $(u_n)_{n\in I}$.

u_n est le terme général de rang n (se lit « u indice n » ou « u de n »).

Le terme initial est u_0 , ou u_p lorsque la suite est définie à partir du rang p.

On peut définir une suite réelle par plusieurs façons , les plus fréquentes :

- Par une liste de ses éléments, par exemple : $u_0 = 1; u_1 = 3;\ u_2 = 5;\ u_3 = 7\ etc.$
- Par une formule explicite pour le terme général, par exemple : $u_n = 3n^3 + n - 4$.
- Par une formule de récurrence, elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , et à préciser la valeur de u_0 .
- Par une façon implicite, par exemple u_n est l'unique réel vérifiant $u_n^3 + u_n = n$

Définition 2

- Une suite réelle est constante si et seulement si , pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite réelle est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang :

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

- Une suite réelle est périodique si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

Une suite réelle est périodique, de période p, alors pour tout n et k de $\mathbb{N}$: $u_{n+pk} = u_n$.

- Une suite réelle est croissante (resp. décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$)
- Une suite réelle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$)

- La suite (u_n) est dite monotone lorsque elle est soit croissante soit décroissante.
- Une suite réelle est majorée (resp. minorée) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq m$ (resp. $u_n \geq m$)
- Une suite réelle est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Exemples :

i- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = E\left(\frac{4}{n}\right)$, (u_n) est une suite stationnaire.

ii- Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, (u_n) est une suite périodique de période p=8

iii- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{2^n}$, (u_n) est une suite décroissante sur $\mathbb{N}$

iv- $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n + 3$, (u_n) est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$

v- $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, (u_n) est une suite périodique

vi- $v_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n - 1}{1 + v_n}$, (v_n) est une suite périodique

2. SUITE ARITHMETIQUE _ SUITE GEOMETRIQUE

Suite arithmétique

- Une suite réelle (u_n) est appelée suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
- Formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.
- Relation entre u_p et u_s : $\forall p, s \in \mathbb{N},\ u_p = u_s + (p - s)r$.
- Les réels a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si : $b = \frac{a + c}{2}$.
- Somme partielle : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$;($u_p + \cdots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$)

Suite géométrique

- Une suite réelle (u_n) est appelée suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$.
- Formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.
- Relation entre u_p et u_s : $\forall p, s \in \mathbb{N},\ u_p = u_s\, q^{p-s}$
- Les réels a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si : $b^2 = ac$. (où a , b et c sont des réels non nuls)
- Somme partielle : $(q \neq 1)$: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (plus générale : $u_p + \cdots + u_n = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$)

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

3. LE SYMBOLE SOMME $\sum$

Soit $(x_k)_{p\le k\le n}$ une famille de nombres réels.

Définition 1

Soit p et n deux entiers naturels tel que $p \le n$

On note la somme : $x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n$ par $\sum_{k=p}^{n} x_k$ ou $\sum_{k\in[\![p,n]\!]} x_k$ ou $\sum_{p\le k\le n} x_k$ et on lit « la somme de x_k , k allons de p jusqu'à n »

Propriétés

Soient $(x_k)_{p\le k\le n}$ et $(y_k)_{p\le k\le n}$ deux familles de nombres réels :

- Soient α *et* β deux réels : $\sum_{k=p}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha\sum_{k=p}^{n} x_k + \beta\sum_{k=p}^{n} y_k$
- Soit x un réel alors : $\sum_{k=p}^{n} x = (n-p+1)x$.
- Si $\forall k \in [\![p,n]\!]$: $x_k \le 0$ (resp. $x_k \ge 0$) alors $\sum_{k=p}^{n} x_k \le 0$ (resp. $\sum_{k=p}^{n} x_k \ge 0$).
- Si $\forall k \in [\![p,n]\!]$: $x_k \le y_k$ alors $\sum_{k=p}^{n} x_k \le \sum_{k=p}^{n} y_k$.
- $\sum_{k=p}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$ (Simplifications télescopiques)
- $\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{n} x_{n+p-k}$

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

V-Exercices SUITES

Exercice n°1M Soit la suite réelle (U_n) définie sur ℕ* par : $U_1 = \frac{1}{2}$, et $U_{n+1} = \frac{(-1)^n}{U_n}$. Calculer U_{2018} .

Exercice n°2M Soit la suite réelle (a_n) définie sur ℕ par :

$a_0 = 3$, et pour tout n de ℕ, $a_{n+1} = \begin{cases} 1-a_n & si\ n\ est\ paire \\ \dfrac{1}{1-a_n} & si\ n\ est\ impaire \end{cases}$. Montrer que (a_n) est périodique

Exercice n°3M Soit la suite réelle (V_n) définie sur ℕ par : $V_0 \in [0,3]$ et $V_{n+1} = |V_n| - 1$.

Montrer que (V_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice n°4M**« Concours National 2010 »:** Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle non nulle telle que pour tout entier $n \geq 1$, $U_n^2 - U_{n+1} \times U_{n-1} = 1$. Montrer qu'il existe un réel k tel que : pour tout entier $n \geq 1$, $U_{n+1} = kU_n - U_{n-1}$.

Exercice n°5M Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2017$ et pour tout n de ℕ*, $u_{n+1} = \frac{(\sqrt{2}+1)u_n - 1}{1+\sqrt{2}+u_n}$.

Déterminer u_{2017}

Exercice n°6M Trouver la valeur de $a_1 + a_4 + a_7 + ... + a_{100}$ sachant que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1 et $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{99} = 4917$

Exercice n°7M Deux suites géométriques (U_n) et (V_n) de même rapport q .

Sachant que $U_1 = 27, V_1 = 99$ et $U_{15} = V_{11}$. Calculer U_9

Exercice n°8M Soit la suite (U_n) définie sur ℕ par : $U_0 + U_1 = 0$ et pour tout de ℕ : $U_{n+2} = U_n$.

(U_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice n°9M On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) définie sur ℕ par : $U_n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right]$ et

$V_n = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right] - \frac{1}{2}$ où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x

(a) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique. **(b)** Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

(c) En déduire que pour tout n de ℕ : $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{2n-1+(-1)^n}{4}$

Exercice n°10M On considère la suite réelle (U_n) définie sur ℕ par : $U_0 \in \mathbb{R}^*$ et $U_{n+1} = |U_n| - 3U_n$

Exprimer U_n en fonction de n.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Exercice n°11M Soit pour tout $k\in\{0,1,2,...,2019\}$: $\alpha_k = 1-\alpha_{2019-k}$. Calculer $S=\sum_{k=0}^{2019}(-1)^k\alpha_k$

Exercice n°12M Montre que pour tout n de ℕ : $\left[\frac{n+1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}k$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x

Exercice n°13M :Soit la suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_n=\begin{cases}5 & si\ n\ est\ divisible\ par\ 2\ et\ 3\\ 168 & si\ n\ est\ divisible\ par\ 2\ et\ 337\\ 2 & si\ n\ est\ divisible\ par\ 3\ et\ 337\\ 0 & si\ non\end{cases}$

Calculer $s_n=\sum_{k=0}^{2021}u_k$

Exercice n°14M On considère la suite réelle (U_n) définie sur ℕ par :

$U_0=1, U_1=\frac{1}{2}\quad et\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+2}=U_{n+1}-U_n$. Calculer $\sum_{k=1}^{2020}U_k$

Exercice n°15M **« Sommation d'ABEL »** Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles définies sur ℕ .

Soit pour tout n de ℕ : $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

Montrer que pour tout n de ℕ : $\sum_{k=0}^{n}a_kb_k=b_{n+1}s_n-\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k)s_k$

Exercice n°16M Calculer en fonction de n : $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}$

Exercice n°17M Sachant pour tout réel x on a : $(1+2x+3x^2)^n=a_0+a_1x+\ldots+a_{2n}x^{2n}$ avec n est un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k}a_i$

Exercice n°18M Calculer $\sum_{k=0}^{2018}\left[\frac{k}{3}\right]$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x.

Exercice n°19M Calculer $\sum_{k=0}^{n^2}\left[\sqrt{k}\right]$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x

Exercice n°20M On considère la suite réelle (u_n) définie sur ℕ* par : $u_1=1$ et $u_{n+1}=2u_n+\sqrt{1+3u_n^2}$.

Montrer que pour tout n de ℕ*: u_n est un entier naturel.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Exercice n°21M Soit la suite (U_n) définie sur ℕ par : $U_0 = b$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\,2}}{1+U_n}$ avec $b \in \mathbb{N}$

Montre que pour tout $n \in \left\{0,1,2,\ldots,\left[\dfrac{b}{2}\right]\right\}$: $[U_n] = b - n$. , où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x

Exercice n°22M Soit $s(n)$ le nombre des solutions de l'équation $\cos(nx) = \cos(x)$ dans $[0,\pi]$ avec n est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer en fonction de n : $\sum_{k=2}^{n} s(k) = s(2) + s(3) + \cdots + s(n)$

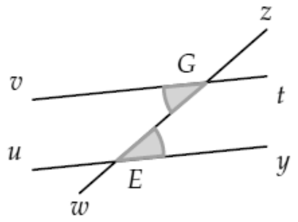
Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

VI-Géométrie : Triangles isométriques-Triangles semblables

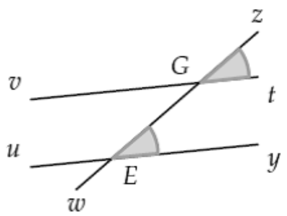
ANGLES ALTERNES-INTERNES- ANGLES CORRESPONDANTS

PROPRIETES :

- **i-** Si **deux droites sont parallèles** alors les angles **alternes-internes** reposant sur ces droites sont **égaux.**
- **ii-** Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure alors elles sont parallèles



- **iii-** Si **deux droites sont parallèles** alors les angles **correspondants** reposant sur ces droites sont **égaux.**
- **iv-** Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure alors elles sont parallèles



TRIANGLES ISOMETRIQUES

DÉFINITION

Deux triangles *isométriques* sont deux triangles dont les côtés sont deux à deux de même longueur.

Dire que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques signifie que : $\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{cases}$

THÉORÈME

Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles isométriques, alors :

$\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$ et $\angle CAB = \angle C'A'B'$

Deux triangles isométriques ont les mêmes angles. La réciproque est fausse.

THÉORÈME

Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles isométriques, alors ils ont même aire. La réciproque est fausse.

CAS D'ISOMETRIES DE DEUX TRIANGLES

THÉORÈME

Pour démontrer que deux triangles sont isométriques, il suffit d'établir l'une des propositions suivantes.

1- Chaque côté est de même longueur que son homologue.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

2- L'un des angles est égal à son homologue et les côtés adjacents à cet angle sont chacun de même longueur que son homologue.

3- Deux angles sont égaux à leur homologue et l'un des côtés est de même longueur que son homologue.

TRIANGLES SEMBLABLES

DÉFINITION

Deux triangles semblables sont deux triangles tel que tout angle de l'un est égal à son homologue dans l'autre.
Dire que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables signifie que :
$\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$ et $\angle CAB = \angle C'A'B'$

Remarque : Des triangles isométriques sont des triangles semblables, mais des triangles semblables ne sont pas nécessairement isométriques.

THÉORÈME

Pour que deux triangles soient semblables il suffit qu'il y ait deux angles égaux à leur homologue.
Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement il existe un nombre réel strictement positif k tel que : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$

Notations et vocabulaire :Le nombre k est appelé rapport de similitude qui transforme ABC en $A'B'C'$.

THÉORÈME

Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables et si k est le rapport de similitude qui transforme ABC en $A'B'C'$, alors : $aire(A'B'C') = k^2 aire(ABC)$.

CAS DE SIMILITUDE DE DEUX TRIANGLES

THÉORÈME

Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit d'établir l'une des propositions suivantes.

1- Deux angles sont égaux à leur homologue.
2- Les longueurs des côté de l'un sont proportionnelles à leurs homologues
3- L'un des angles est égal à son homologue et les longueurs des côté adjacents à cet angle sont proportionnelles aux longueurs des côtés homologues.

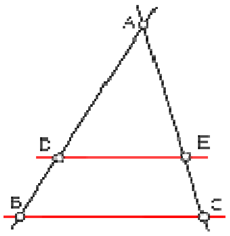
Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

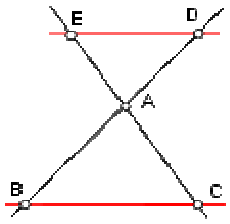
LE THEOREME DE THALES

Soit un triangle ABC, et deux points D et E des droites (AB) (et (AC) de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC) , Alors on a :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Configurations possibles



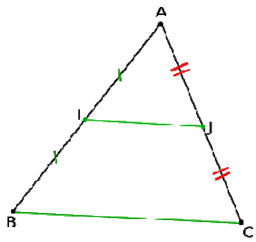


RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES

Dans un triangle ABC, supposons donnés des points D et E appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ .Si les rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$ sont égaux, alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

THEOREME DE LA DROITE DES MILIEUX

Soit un triangle ABC, et nommons D et E les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ Alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles et on a : $BC=2DE$.



Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

VII-Exercices Géométrie

Exercice n°01[D] $ABDE$ et $BCFG$ sont deux carrés construits à l'extérieur du triangle ABC.

Démontrer que $AG = DC$.

Exercice n°02[D] ABC est un triangle équilatéral. M, N et P sont des points des $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ tels que $BM = CN = AP$.

Démontrer que MNP est équilatéral.

Exercice n°03[D] $ABCD$ est un parallélogramme, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[AB]$

Démontrer que $FI = IJ = JE$

Exercice n°04[D] ABC est un triangle isocèle en A. B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[AB]$

Démontrer que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.

Exercice n°05[D] $ABCD$ est un parallélogramme, N un point du segment $[DC]$ distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.

Montrer que $DN \times MB = BA \times AD$.

Exercice n°06[D] Soit ABC un triangle isocèle en C. On note H le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[AB]$ et N le pied de la bissectrice intérieur issue de B. On suppose que les droites $(AH), (CM)$ et (BN) sont sécantes en un point D.

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice n°07[D] On considère un parallélogramme $ABCD$. Une droite Δ contenant A intersecte (BD) en E, (BC) en F et (DC) en G. On suppose que E est intérieur à $[BD]$ et F est intérieur à $[BC]$.

Montrer qu'on a $AE^2 = EF \times EG$.

Exercice n°08[D] Trois droites issues d'un point S coupent deux droites parallèles Δ et Δ' en A, B, C et A', B', C' respectivement.

Démontré que les points d'intersection P et Q des diagonales du trapèze $ABB'A'$ et celles du trapèze $BCC'B'$ se trouvent sur une droite parallèle à Δ.

Exercice n°09[M] (Même donner de l'exercice 1) $ABDE$ et $BCFG$ sont deux carrés construits à l'extérieur du triangle ABC.

Démontrer que $EG = 2AM$ où M est le milieu du segment $[BC]$

Exercice n°10[D] Sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ d'un parallélogramme $ABCD$ on a construit de manière externe deux triangles équilatéraux ABF et ADE. Prouver que le triangle CEF est équilatéral.

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430

Exercice n°11 M Soit H le milieu de la base $[BC]$ d'un triangle isocèle ABC. Le point E sur le côté $[AC]$ est tel que $(HE)\perp(AC)$, le point O est le milieu de $[HE]$.

Montrer que les droites (AO) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice n°12 M Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note E l'intersection de la bissectrice de l'angle $A\hat{D}C$ avec (BC). On appelle M l'intersection de la médiatrice du segment $[AD]$ avec $[DE]$. On note F l'intersection de (AM) avec (BC).

a) Montrer que $DE = AF$

b) Montrer que $AB \times AD = DE \times DM$

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com Tél. :24962430