SEMAINE DES SUITES REELLES

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

Exercice n°01

On considère la suite U définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in N :\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6\times 2^n}$

1. Montrer que pour tout n de N : $U_n \geq 0$.
2. Montrer que U est décroissante.
3. En déduire que U est convergente et calculer sa limite.
4. Soit pour tout n de N : $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$
   a. Montrer que pour tout n de N, $S_n = -3U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n + \frac{7}{2}$.
   b. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$
5. Soit pour tout n de N : $V_n = nU_n$
   a. Montrer que pour tout n de N, $V_{2n} \leq 2(S_{2n} - S_n)$ et $V_{2n+1} \leq V_{2n} + U_{2n}$
   b. En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$
6. Soit pour tout n de N^* : $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k+1})$
   c. Montrer que pour tout n de N^*, $T_n = S_n - nU_{n+1}$.
   d. En déduire $\lim_{n\to+\infty} T_n$

Correction d'exercice n°01

1. Par récurrence : évident
2. Pour tout n de N : $U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{3}U_n + \frac{1}{6\times 2^n} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^{n+2}} - U_n\right)$

Donc il suffit de démontrer pour tout n de N : $U_n \geq \frac{1}{2^{n+2}}$

-Pour $n=0$, on a $U_0 = 2 \geq \frac{1}{2^{0+2}}$

-Soit n un entier naturel. Supposons que $U_n \geq \frac{1}{2^{n+2}}$. Montrons que $U_{n+1} \geq \frac{1}{2^{n+3}}$

On a $U_n \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ alors $\frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6\times 2^n} \geq \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{6\times 2^n} = \frac{1}{2^{n+2}} \geq \frac{1}{2^{n+3}}$

Donc $U_{n+1} \geq \frac{1}{2^{n+3}}$

Conclusion : *U est décroissante.*

3. *On a U est décroissante et minoré par* 0 *alors U est convergente*

On note ℓ *sa limite.*

On a $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6\times 2^n}$, *par passage à la limite :* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6\times 2^n}\right)$

Alors $\ell = \frac{\ell}{3} + 0$ *donc* $\ell = 0$

4.

a- *On a pour tout n de N :* $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6\times 2^n}$ *alors* $\sum\limits_{k=0}^{n} U_{k+1} = \frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n} U_k + \frac{1}{6}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}$

Donc $S_n - U_0 + U_{n+1} = \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$ *alors* $S_n = -\frac{3}{2}U_{n+1} + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\times\frac{1}{6\times 2^n}$

Ainsi $S_n = -\frac{3}{2}U_{n+1} + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\times\left(U_{n+1} - \frac{U_n}{3}\right)$

Conclusion : *Pour tout n de N ,* $S_n = -3U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n + \frac{7}{2}$.

b- *On a Pour tout n de N ,* $S_n = -3U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n + \frac{7}{2}$

Par passage à limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n + \frac{7}{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -3\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$

5. *Pour tout n de N :* $V_n = nU_n$

a- $S_{2n} = \underbrace{U_0 + U_1 + \cdots U_n}_{S_n} + \underbrace{U_{n+1} + \cdots + U_{2n}}_{nU_{2n} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} U_k \leq nU_{n+1}}$

Alors $S_n + nU_{2n} \leq S_{2n}$ *donc* $\frac{V_{2n}}{2} \leq S_{2n} - S_n$

Conclusion : *Pour tout n de N* $V_{2n} \leq 2(S_{2n} - S_n)$

-On a U est décroissante alors : $U_{2n+1} \leq U_{2n}$

Donc $(2n+1)U_{2n+1} \leq (2n+1)U_{2n} = 2nU_{2n} + U_{2n}$

Alors , Pour tout n de N : $V_{2n+1} \leq V_{2n} + U_{2n}$

b- *On S est convergente vers* $\frac{7}{2}$ *alors* $S_{2n} \to \frac{7}{2}$ *et comme* $0 \le V_{2n} \le 2(S_{2n} - S_n)$ *alors*

$\boxed{V_{2n} \to 0}$ (*car* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 2\left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}\right) = 0$

D'autre part on a $0 \le V_{2n+1} \le V_{2n} + U_{2n}$ *alors* $\boxed{V_{2n+1} \to 0}$ (*car* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_{2n} + U_{2n} = 0 + 0 = 0$)

Conclusion : *on a* $\boxed{V_{2n} \to 0}$ *et* $\boxed{V_{2n+1} \to 0}$ *alors* $\boxed{V_n \to 0}$

6. *Pour tout n de N** : $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k+1})$

a- $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} kU_k - \sum\limits_{k=1}^{n} kU_{k+1}$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)U_k = \sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)U_k$$

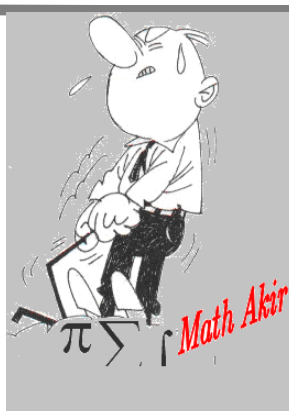
$$= \sum_{k=1}^{n} kU_k - \left[\sum_{k=1}^{n} (k-1)U_k + nU_{n+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} [k - (k-1)]U_k - nU_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} U_k - nU_{n+1} = S_n - nU_{n+1}$$

b- *On a* $T_n = S_n - nU_{n+1}$ *alors* $T_n = S_n - \frac{n}{n+1} V_{n+1}$

Par passage à la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{n}{n+1} V_{n+1}\right) = \frac{7}{2} - 1 \times 0 = \frac{7}{2}$

Pour aller plus loin



Soit pour tout n de N:

$$H_n = 3^n U_n - 1$$

1- *Montrer que* (H_n) *est une suite géométrique.*

2- *En déduire* U_n *en fonction de n.*