Fiche de cours *3ème sciences*

ANGLES ORIENTES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Formules de conversion

Si a , b et c sont les mesures respectives en radians, en degrés et en grades d'un angle donné alors on a :

$$\frac{a}{\pi}=\frac{b}{180}=\frac{c}{200}$$

Longueur d'un arc.

Soit ζ un cercle de centre O et de rayon r.

A et B deux points de cercle ζ tel que $A\hat{O}B=\alpha\,(radians)$.

La longueur ℓ de l'arc géométrique intercepté par l'angle α est $\ell = r\alpha$

Cas particulier : r = 1 , $\ell=\alpha$

Orientation du plan

Il est visible que sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours :

**)L'un de ces sens est dit direct ou positif c'est le sens contraire de celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.*

**)L'autre sens est dite indirect ou négatif.*

**)Un cercle est dit orienté, si on choisi un sens de parcours sur ce cercle.*

**)Le plan est dit orienté, si la convention des sens précédente est adoptée pour tous les cercles du plan.*

Cercle trigonométrique.

On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Dans le suite de cours on désigne par ζ un cercle trigonométrique.

Arcs orientés.

**)A et M deux points de ζ. Il y a deux arcs géométriques d'origine A et d'extrémité M dont un seul est parcouru suivant l'orientation du cercle ζ.*

Cet arc est appelé arc orienté d'origine A et d'extrémité M et on note $\overset{\frown}{AM}$.

Mesures d'un arc orienté

Soit ζ un cercle trigonométrique et $\overset{\frown}{AB}$ un arc orienté.

ℓ la longueur de l'arc géométrique associé.

On appelle mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ tout réel $\ell+2k\pi$ où $k\in Z$ et on note $mes\,\overset{\frown}{AB}$

$mes\,\overset{\frown}{AB}=\ell+2k\pi$, $k\in Z$, *on le note* $mes\,\overset{\frown}{AB}\equiv\ell[2\pi]$

Longueur de l'arc géométrique

L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ possède une unique mesure dans $[0,2\pi[$, qui est la Longueur de l'arc géométrique associé.

Mesure principale d' arc orienté .

On appelle mesure principale d'un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ l'unique mesure de cet arc, appartenant à $]-\pi,\pi]$

**)Pour tout point M de ζ et tout réel x, il existe un unique point N de ζ tel que $mes\,\overset{\frown}{MN}=x$*

**)On convient que $mes\,\overset{\frown}{AA}=2k\pi$*

Propriétés

Pour tous points A, B et C de ζ, on a :

$mes\,\overset{\frown}{AB}+mes\,\overset{\frown}{BC}\equiv mes\,\overset{\frown}{AC}[2\pi]$	$mes\,\overset{\frown}{AB}\equiv -mes\,\overset{\frown}{BA}[2\pi]$

**)Toutes symétrie axiale transforme les mesures des arcs orientés en leurs opposés*

**)Toute translation conserve les mesures des arcs orienté.*

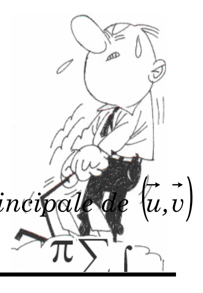
Angles orienté de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.

Le couple $(\vec{u},\vec{v})$ s'appelle un angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$mes(\vec{u},\vec{v})\equiv mes\,\overset{\frown}{AB}[2\pi]$ *(Notation :* $mes(\vec{u},\vec{v})\equiv\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)[2\pi]$ *)*

**)L'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$, appelée mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$*



*) $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)+\left(\overrightarrow{v},\widehat{\ \overrightarrow{w}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{w}}\right)[2\pi]$

*) $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u'},\widehat{\ \overrightarrow{v'}}\right)[2\pi]$ *si et seulement si* $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{u'}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{v},\widehat{\ \overrightarrow{v'}}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{v},\widehat{\ \overrightarrow{u}}\right)[2\pi]$	$\left(-\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$	$\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ -\overrightarrow{v}}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$
$\left(-\overrightarrow{u},\widehat{\ -\overrightarrow{v}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$	$\left(a\overrightarrow{u},\widehat{\ b\overrightarrow{v}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$ *si* $ab>0$	$\left(a\overrightarrow{u},\widehat{\ b\overrightarrow{v}}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$ *si* $ab<0$

Propriétés

*) $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v'}}\right)[2\pi]$ *si et seulement si* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{v'}$ *sont colinéaires et de même sens.*

*) $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv 0[2\pi]$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires et de même sens.*

*) $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv \pi[2\pi]$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires et de sens opposés.*

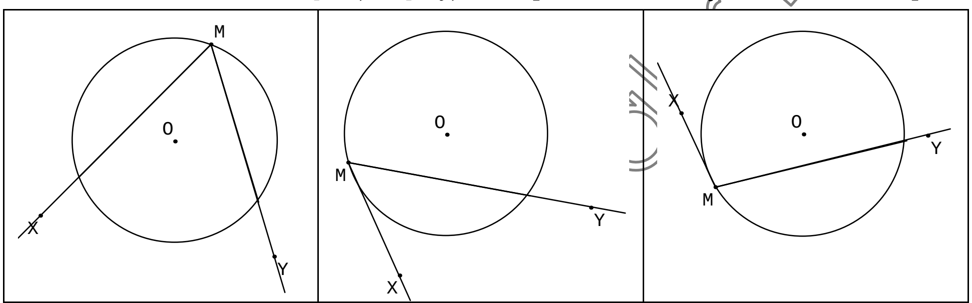
*) $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux, si et seulement si* $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *ou* $\left(\overrightarrow{u},\widehat{\ \overrightarrow{v}}\right)\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$

*)*Soit ABC un triangle alors :* $\left(\overrightarrow{AB},\widehat{\ \overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\widehat{\ \overrightarrow{CB}}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\widehat{\ \overrightarrow{BA}}\right)\equiv\pi[2\pi]$

Définition 1:

Soit $\left(\overrightarrow{Mx},\overrightarrow{My}\right)$ *un angle orienté de demi-droites. On dit que cet angle est inscrit dans un cercle* ζ *si et seulement si :*

- $M\in\zeta$
- *Les deux demi-droites [Mx) et [My) recoupent le cercle* ζ*, l'une des deux pouvant être tangente à* ζ *en M.*

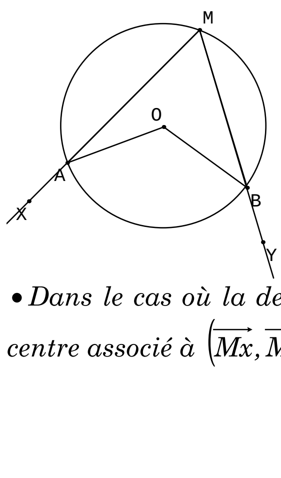


Définition 2

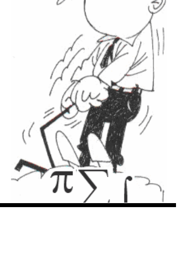
- *Soit* $\left(\overrightarrow{Mx},\overrightarrow{My}\right)$ *un angle inscrit dans un cercle* ζ *de centre O.*

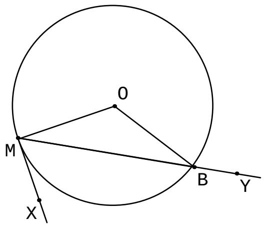
Soient A et B les points où les demi-droites [Mx) et [My) recoupent ζ.

L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ *est dit angle au centre associé à l'angle inscrit* $\left(\overrightarrow{Mx},\overrightarrow{My}\right)$.

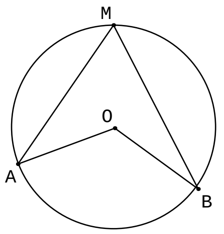
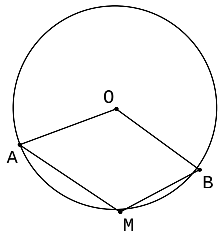
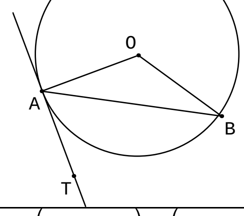
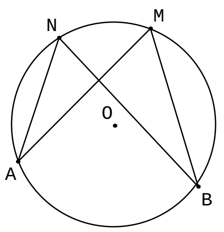
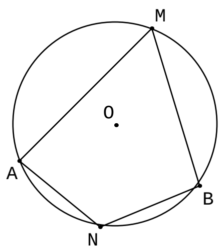
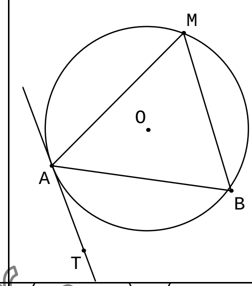


- *Dans le cas où la demi-droite [Mx) est tangente à* ζ *en M et la demi-droite [My) recoupe* ζ *en B, l'angle au centre associé à* $\left(\overrightarrow{Mx},\overrightarrow{My}\right)$ *est* $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)$





Angles inscrits à un même angle au centre

		
$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$		$2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$
		
$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}\right)[2\pi]$	$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}\right)+\pi[2\pi]$	$\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)[2\pi]$

Théorème

Soit A et B deux points du plan orienté dans le sens direct, $\theta\neq k\pi,\ k\in Z$ *et T un point du plan tel que* $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\theta[2\pi]$.

1°)Il existe un seul cercle ξ *passant par A et B et tangente à (AT) en A.*

2°)Soit $\Gamma=\left\{M\in\wp/\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\theta[2\pi]\right\}$

**)Si le mesure principale de* $\theta\in\left]\pi,0\right[$ *alors* $\Gamma=\overset{\frown}{AB}-\{A,B\}$

**)Si le mesure principale de* $\theta\in\left]0,\pi\right[$ *alors* $\Gamma=\overset{\frown}{BA}-\{A,B\}$

Définition :

Le plan orienté dans le sens direct

**)On dit qu'une base* $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ *du plan est orthonormé direct si* $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$ *et* $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

**)On dit qu'une base* $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ *du plan est orthonormé indirect si* $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$ *et* $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Définition

Le plan orienté dans le sens direct

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs non nul, et soit* $\vec{u'}$ *le vecteur vérifiant* $\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\vec{u'}\right\|$ *et* $\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

**)On appelle déterminant de* $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ *et on note* $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ *le réel* $\vec{v}.\vec{u'}$

**)Si* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$ *alors* $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$