ÉCRITURE COMPLEXE DES TRANSFORMATIONS DU PLAN

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

Écriture complexe des déplacements

Écriture complexe des translations

L'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, alors il existe un nombre complexe b tel que $z'=z+b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.

Démonstration

$M'(z')=t_{\vec{u}}(M(z))$ alors $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ donc $z'=z+z_{\vec{u}}$

Écriture complexe des rotations :

L'application f est une rotation d'angle θ non nul et centre I, alors : $z'=e^{i\theta}(z-z_I)+z_I$, où $z_I=\dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Démonstration

$M'(z')=R_{(I,\theta)}(M(z))$ alors $\begin{cases} IM=IM' \\ \left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$ alors $\begin{cases} \left|\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$ alors $\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}=e^{i\theta}$ donc $z'=e^{i\theta}(z-z_I)+z_I$

Écriture complexe des antidéplacements

Écriture complexe des symétries axiales

L'application f est une symétrie axiale d'axe Δ passe par le point I et admet le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur associe , alors $z'=e^{i2\theta}\left(\bar{z}-\bar{z_I}\right)+z_I$ où θ désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$.

Démonstration

Soit Δ_1 la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point I alors si

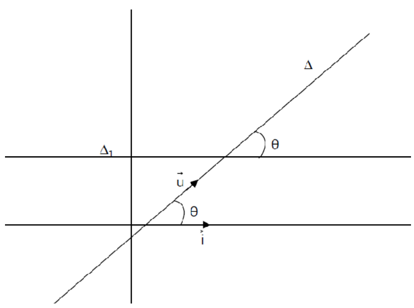
$M'(z')=S_{\Delta_1}(M(z))$ alors $\begin{cases} Ré(z')=Ré(z) \\ Im(z')+Im(z)=2Im(z_I) \end{cases}$ alors

$\{Ré(z')+iIm(z')=Ré(z)-iIm(z)+2iIm(z_I)$ donc $z'=\bar{z}-\bar{z_I}+z_I$

D'autre part on a $S_\Delta\circ S_{\Delta_1}=R_{(I,2\theta)}$ alors $S_\Delta=R_{(I,2\theta)}\circ S_{\Delta_1}$

L'écriture complexe de $R_{(I,2\theta)}$: $z'=e^{2i\theta}(z-z_I)+z_I$

Alors L'écriture complexe de S_Δ : $z'=e^{2i\theta}\left(\bar{z}-\bar{z_I}+z_I-z_I\right)+z_I=e^{2i\theta}\left(\bar{z}-\bar{z_I}\right)+z_I$



Écriture complexe des symétries glissantes

L'application f est une symétrie glissante dont d'axe Δ passe par le point I et admet le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur associe , alors $z'=e^{i2\theta}\left(\bar{z}-\bar{z_I}\right)+z_I+z_{\vec{u}}$ où θ désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$.

Démonstration

La forme reduite de f est : $f=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$ où est un vecteur directeur Δ

Une écriture complexe de S_Δ est $z'=e^{i2\theta}\left(\bar{z}-\bar{z_I}\right)+z_I$

Une écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est $z'=z+z_{\vec{u}}$

Alors l'ecriture complexe de f est : $z'=e^{i2\theta}\left(\bar{z}-\bar{z_I}\right)+z_I+z_{\vec{u}}$

Écriture complexe des similitudes

Écriture complexe des homothéties

L'application f est une homothétie de centre I et de rapport k , si et seulement si, $z'=k(z-z_I)+z_I$.

Démonstration

$M'(z') = h_{(I,k)}(M(z))$ alors $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ donc $z' - z_I = k(z - z_I)$ alors $z' = k(z - z_I) + z_I$

Écriture complexe des similitudes directes

L'application f est une similitude directe de centre I, d'angle θ et de rapport k, alors, $z' = ke^{i\theta}(z - z_I) + z_I$.

Démonstration

$M'(z') = f_{(I,\theta,k)}(M(z))$ alors $\begin{cases} IM' = kIM \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ alors $\begin{cases} \left|\dfrac{z' - z_I}{z - z_I}\right| = k \\ \arg\left(\dfrac{z' - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ alors $\dfrac{z' - z_I}{z - z_I} = e^{i\theta}$ donc $z' = ke^{i\theta}(z - z_I) + z_I$

Réciproquement :

Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un nombre complexe non nul et b un complexe :

- Si a =1 et b = 0 alors f est l'identité
- Si a = 1 et $b \neq 0$ alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $|a| = 1$ et $a = 1$ alors f est une rotation d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et de centre I d'affixe $z_I = \dfrac{b}{1 - a}$
- Si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de rapport $|a|$, d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et de centre I d'affixe $z_I = \dfrac{b}{1 - a}$

Démonstration

☑ Si $|a| = 1$ et $a = 1$ alors il exisite $\theta \in R$ tel que $a = e^{i\theta}$

f admet pour seule point fixe le point I d'affixe $z_I = \dfrac{b}{1 - a}$

En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = az + b \\ z_I = az_I + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_I = e^{i\theta}(z - z_I)$

Alors f est une rotation d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et de centre I d'affixe $z_I = \dfrac{b}{1 - a}$

☑ Si $|a| \neq 1$ alors il exisite $\theta \in R$ tel que $a = |a|e^{i\theta}$

f admet pour seule point fixe le point I d'affixe $z_I = \dfrac{b}{1 - a}$

En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = az + b \\ z_I = az_I + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_I = |a|e^{i\theta}(z - z_I)$

Alors f est une similitude directe de rapport $|a|$, d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et de centre I d'affixe $z_I = \dfrac{b}{1 - a}$

Forme complexe d'une simimlitude indirecte.

Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, où a est un nombre complexe non nul et b un complexe :

- Si $|a| = 1$: f est une antidéplacement
- Si $|a| \neq 1$: f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$

Démonstration

Soient $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$ alors

$A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |a\overline{z_B} - a\overline{z_A}| = |a||\overline{z_B - z_A}| = |a||z_B - z_A| = |a|AB$

$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{D'} - z_{C'}}{z_{B'} - z_{A'}}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\dfrac{a(\overline{z_D - z_C})}{a(\overline{z_B - z_A})}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\overline{\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}\right)[2\pi] \equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

Alors

si $|a| = 1$: f est une antidéplacement

si $|a| \neq 1$: f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$

Écriture complexe des similitudes indirectes

L'application f est une similitude indirecte de centre I, d'axe Δ et de rapport k, alors, $z' = ke^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{z_I}) + z_I$ où θ désigne une mesure de l'angle $(\vec{i}; \vec{u})$.

Démonstration

La forme reduite de f est : $f = h_{(I,k)} \circ S_\Delta$.

Une écriture complexe de S_Δ est $z' = e^{i2\theta}\left(\bar{z} - \bar{z}_I\right) + z_I$

Une écriture complexe de $h_{(I,k)}$ es $z' = k\left(z - z_I\right) + z_I$

Alors l'ecriture complexe de f est : $z' = k\left(e^{2i\theta}\left(\bar{z} - \bar{z}_I\right) + z_I - z_I\right) + z_I = ke^{i2\theta}\left(\bar{z} - \bar{z}_I\right) + z_I$

Réciproquement :

Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, où a est un nombre complexe non nul et b un complexe :

◈ Si $|a| = 1$ (dans ce cas $a = e^{i\theta}$) et $a\bar{b} + b = 0$ alors f est une symétrie axiale d'axe Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\ y + \text{Ré}(b) = 0$.

◈ Si $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b \neq 0$ alors f est une symétrie glissante d'axe Δ d'équation :

$(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\ y + \text{Ré}\left(\frac{b - a\bar{b}}{2}\right) = 0$ et de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$.

◈ Si $|a| \neq 1$ (dans ce cas $a = ke^{i\theta}$ avec $k = |a|$) alors f est une similitude indirecte de rapport k, d'axe Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\, y + \frac{\text{Ré}\left(kb - a\bar{b}\right)}{k(k+1)} = 0$ et de centre I d'affixe $z_I = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$

Démonstration

☑ Si $|a| = 1$ alors f est une antidéplacement soit une symétrie axiale d'axe Δ ou une symétrie glissante

f est une symétrie axiale si et seulement si : $f \circ f = id_{\wp}$

L'ecriture complexe de $f \circ f$ est : $z' = a\left(\overline{a\bar{z} + b}\right) + b = a\,\bar{a}\,z + a\bar{b} + b = z + a\bar{b} + b$

Alors $f \circ f = id_{\wp}$ si et seulement si $z' = z$

Conclusion : f est une symétrie axiale si et seulement si : $a\bar{b} + b = 0$

Δ est l'ensemble des points invaraints par f alors

$M(z) \in \Delta$ si et seulement si $z = a\bar{z} + b$ alors $x + iy = (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) + b$

Alors $x = x\cos\theta + y\sin\theta + \text{Ré}(b)$ et $y = -y\cos\theta + x\sin\theta + \text{Im}(b)$

donc Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\ y + \text{Ré}(b) = 0$.

☑ Si $a\bar{b} + b \neq 0$ alors f est une symétrie glissante d'axe Δ et vecteur $\vec{v}$

On a $f \circ f = t_{2\vec{v}}$ alors $z_{2\vec{v}} = a\bar{b} + b$ donc $z_{\vec{v}} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$

On a $t_{-\vec{v}} \circ f = S_\Delta$ alors l'ecriture complexe de S_Δ est : $z' = a\bar{z} + b - \frac{a\bar{b} + b}{2} = a\bar{z} + \frac{b - a\bar{b}}{2}$

Alors Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\ y + \text{Ré}\left(\frac{b - a\bar{b}}{2}\right) = 0$

☑ Si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$

Le centre de f est défini par $z_I = a\bar{z}_I + b$ alors $\bar{z}_I = \bar{a}z_I + \bar{b}$ donc $z_I = a\left(\bar{a}z_I + \bar{b}\right) + b = |a|^2 z_I + a\bar{b} + b$ alors $z_I = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$

La forme réduite de f est $f = h_{(I,k)} \circ S_\Delta$ alors $S_\Delta = h_{\left(I, \frac{1}{k}\right)} \circ f$ alors l'écrture complexe de S_Δ est

$z' = \frac{1}{k}\left(a\bar{z} + b - z_I\right) + z_I = e^{\theta}\bar{z} + \frac{b + (k-1)z_I}{k} = e^{\theta}\bar{z} + \frac{kb - a\bar{b}}{k(k+1)}$

alors l'équation de Δ : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\, y + \frac{\text{Ré}\left(kb - a\bar{b}\right)}{k(k+1)} = 0$.

Identification d'une similitude directe

- $z' = az + b$
  - a réel
    - $a = 1$ → Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
    - $a \neq 1$ → Homothétie de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
  - a complexe non réel
    - $|a| = 1$ → Rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$
    - $|a| \neq 1$ → Similitude de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et de rapport $k = |a|$

Identification d'une similitude indirecte

- $z' = a\bar{z} + b$
  - $|a| = 1$
    - $a\bar{b} + b = 0$ → f est une symétrie axiale d'axe Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\ y + \text{Ré}(b) = 0.$
    - $a\bar{b} + b \neq 0$ → f est une symétrie glissante d'axe Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\ y + \text{Ré}\left(\frac{b - a\bar{b}}{2}\right) = 0$ et de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$.
  - $|a| \neq 1$ → f est une similitude indirecte de rapport k, d'axe Δ d'équation : $(\cos\theta - 1)x + \sin\theta\, y + \frac{\text{Ré}(kb - a\bar{b})}{k(k+1)} = 0$ et de centre I d'affixe $z_I = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$