Fiche de cours $3^{ème}$ *Maths*

ROTATIONS DU PLAN

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

On note par $\wp$ *: le plan orienté dans le sens direct et par* $\Re$ *le repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

Définition :

On appelle rotation de centre ω *et d'angle* θ*, l'application du plan dans lui-même qui fixe le point* ω *et qui à tout point M du plan M distinct de* ω*, associe le point* M' *tel que :* $\begin{cases} \omega M = \omega M' \\ (\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

La rotation de centre ω *et d'angle* θ *est généralement notée* $R_{(\omega,\theta)}$.

Autrement dit : $M' = R_{(\omega,\theta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega M = \omega M' \\ (\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Remarques :

- *Si* $\theta \equiv 0[2\pi]$ *alors* $R = id_p$ (id_p *: identité du plan :* $\forall M \in \wp$, $id_p(M) = M$)
- *Si* $\theta \equiv \pi[2\pi]$ *alors* $R = S_\omega$ (S_ω *: La symétrie centrale de centre* ω)
- *Si* $\theta \in [0,\pi]$*, on dit que R est rotation directe.*
- *Si* $\theta \in]-\pi,0[$*, on dit que R est rotation indirecte.*

Détermination d'une rotation :

Une rotation est parfaitement déterminée par la donnée de son angle et celle d'un point et son image.

Réciproque d'une rotation

La rotation $R_{(\omega,-\theta)}$ *est appelée rotation réciproque de* $R_{(\omega,\theta)}$ *c'est-à-dire* $M' = R_{(\omega,\theta)}(M) \Leftrightarrow M = R_{(\omega,-\theta)}(M')$

Propriétés du rotation

Soit R la rotation de centre ω *et d'angle* θ

Soit A, B , C et D quatre points tels que $A \neq B$ *et* $C \neq D$ *et* $A' = R(A)$, $B' = R(B)$, $C' = R(C)$, $D' = R(D)$

- *Toute rotation conserve le produit scalaire et les distances*
- *Si on a :* $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$ *alors* $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta[2\pi]$
- $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})[2\pi]$ *L'image d'une droite par une rotation est une droite.*
- *L'image d'une segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique*
- *La rotation conserve le barycentre de deux points*
- *La rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité e deux droites .*
- *L'image d'un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique, et de centre l'image du centre.*
- *Toute rotation conserve le contact.*

Définition d'une isométrie :

Soit f une application du plan dans lui-même.

On dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d'images respectives M' *et* N' *on a* $MN = M'N'$

Exemples des isométries :

Symétrie orthogonale, Symétrie centrale, Translation, Rotation.

Théorème

Soit A, B , C et D quatre points tels que $A \neq B$ *,* $AB = CD$ *et* $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$

Il existe une unique rotation R tel que $R(A) = C$ *et* $R(B) = D$*, d'angle* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ *et centre appartenant aux médiatrices des segments* $[AC]$ *et* $[BD]$.

Composée de deux rotations : $R_{(\omega,\theta)} \circ R_{(\omega,\alpha)} = R_{(\omega,\theta+\alpha)}$