EXERCICE N°0

I un intervalle : $I = [-1, +\infty[$*.Soient :* $f : I \to \mathbb{R}$ *,* $x \mapsto \sqrt{1+x}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *,* $x \mapsto 1 + \dfrac{x}{2}$

Montrer que , pour tout x de I : $f(x) \leq g(x)$

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ *par* $f(x) = \dfrac{-4x^2 + 8x - 2}{1 - 2x}$.

1°)Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{1-2x}$.

2°)Etudier les variations des fonctions g et h définies sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ *par* $g(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ *et* $h(x) = 2x - 3$.

3°)Déduire des deux questions précédentes les variations de la fonction f.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[-3 ; +\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+5}$

1°) Démontrer que f(x) peut aussi s'écrire : $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+5}$.

2°) Démontrer que f est croissante sur $[-3 ; +\infty[$

3°) a) Démontrer que f admet un minimum, le préciser.

b) Démontrer que f admet un majorant, en préciser un.

c) En déduire que f est bornée et indiquer un encadrement de f(x).

EXERCICE N°3

On considère les fonctions de références suivantes :

u définie sur R par $u(x) = x^2$ *et v définie sur l'ensemble des réels non nuls par* $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

Décomposer chacune des fonctions suivantes à l'aide des fonctions u, v et de fonctions affines. En déduire leurs variations sur l'intervalle donné.

a) $f(x) = (4 - 2x)^2$ *sur* $[2 ; +\infty[$.

b) $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1$ *sur* $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE N°4

Etudier les variations de f sur I.

1°) $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad I =]1, +\infty[$

2°) $f(x) = x^3 - x^2 + 1, \quad I = \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie dur par : $f(x) = x(1 - x)$

1°)Montrer que , pour tout x de R : $f(x) \leq \dfrac{1}{4}$

2°)En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \dfrac{1}{2}$

3°)Démontrer que $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ *et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ *et décroissante sur l'intervalle* $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

EXERCICE N°6

Montrer que la fonction f : $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{1+x}$ *est décroissante sur* $]-1, +\infty[$

EXERCICE N°7

Soit : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *,* $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

1°)Montrer que : pour tout x de $\left[\frac{1}{2},3\right]$, on a : $2 \le f(x) \le \frac{10}{3}$

2°) En déduire que : $\forall(a,b,c,d,e,f,g,h)\in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{a}{h}+\frac{b}{g}+\frac{c}{f}+\frac{d}{e}+\frac{e}{d}+\frac{f}{c}+\frac{g}{b}+\frac{h}{a}\ge 8$

EXERCICE N°8

On considère les fonctions f et g définie par $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ et $g(x)=x-\frac{1}{x}$

1°)Déterminer le domaine de définition de g et étudier sa parité.
2°)Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
3°)Sur $]0,+\infty[$, *résoudre l'équation g(x) = 0 et chercher le signe de g(x).*
4°)Déterminer les variations de g^2
5°)Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.
6°)Exprimer f en fonction de g^2
7°)En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$. *Dresser le tableau de variation de f .*

EXERCICE N°9

Déterminer le plus grand des deux nombres : $A=\frac{1,0000004}{(1,0000006)^2}$ et $B=\frac{(0,9999995)^2}{0,9999998}$

EXERCICE N°10

Un triangle isocèle ABC a pour base [BC] telle que BC=6 et pour hauteur [AH] telle que AH=5. Considérons sur [AH] un point M et posons AM=x.
La parallèle à (BC) passant par M coupe [AB] en I et [AC] en J.
1°)Calculer la langueur IJ en fonction de x.
2°)a)Désignons par y l'aire du triangle AIJ. Exprimer y en fonction de x lorsque M décrit [AH].
b)Soit f la fonction qui à x associe y. Préciser l'ensemble de définition de f .
c)Etudier les variations de f.

EXERCICE N°11

ABC est un triangle isocèle tel que AB=AC=5 et BC=6. Par un point D de [AB], tracez la parallèle à (BC) ; elle coupe (AC) en E. On pose AD=x.
1°)Calculer BD, EC, ED en fonction de x.
2°)Désignons par y le périmètre du trapèze BDEC. Exprimer y en fonction de x.
Représentez graphiquement la fonction f définie sur [0,5], qui à x associe y.
3°)La hauteur du triangle ABC, issue de A, coupe [DE] en I et [BC] en H.
a)Calculer AH.
b)Calculer, en fonction de x, l'aire z du trapèze BDEC.
c)Etudier la fonction g définie sur [0,5] qui à x associe z.

EXERCICE N°12

Un triangle ABC, de hauteur [AH], est tel que AB=5, BC=8, AH=4. Construisez un tel triangle. Par un point K de [AH], menez la parallèle à (BC) qui coupe respectivement [AB] et [AC] en M et N.
Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur (BC). Posons AK=x
1°)Calculer, en fonction de x, le périmètre, noté p(x), du rectangle MNPQ.
Etudier les variations de la fonction p et tracez sa courbe représentative.
2°)Calculer en fonction de x l'aire, notée a(x), du rectangle MNPQ.
Etudier les variations de la fonction a et tracez sa courbe représentative.
3°)Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit maximale. Calculer ce maximum.

EXERCICE N°13

ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD] tel que : AB=12 , BC=5 et CD=6.
Soit M un point de [AD]. La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N. Soit H le projeté orthogonal de C sur [AB] et E le point d'intersection de (CH) et (MN). Posons AM=x.

1°)Montrer que : $EN=\frac{3}{5}(5-x)$ et $EH=\frac{4}{5}x$. *En déduire que* $MN=\frac{6}{5}(10-x)$

2°)Désignons par y l'aire du trapèze MNBA.
a/Exprimer y en fonction de x.
b/ Etudier les variations de la fonction f, définie sur [0,5], qui à x associe y et tracez sa courbe représentative

EXERCICE N°14

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $\begin{cases} f(x)=x-10 & \text{pour } x>100 \\ f(x)=f(f(x+11)) & \text{pour } x\le 100 \end{cases}$

1°) (a)Calculer f(100) , f(99)
(b)Calculer f(x) pour x entiers naturels, inférieurs ou égaux à 100.

2°)Tracer la courbe représentative de la fonction f .

EXERCICE N°15

Soit f une fonction définie sur $I = [0,1]$ et à valeurs dans I telle que, pour tous x et y réels de I :

$|f(x)-f(y)| \geq |x-y|$.

1°)Montrer que u et v sont des exemples de telles fonctions telle que :

$u : I \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $v : I \to \mathbb{R}, x \mapsto 1-x$

2°)Montrer que l'on a : $\begin{cases} f(0)=0 \\ \text{et} \\ f(1)=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(0)=1 \\ \text{et} \\ f(1)=0 \end{cases}$

3°)On suppose que $f(0) = 0$.

(a)Démontrer que , pour tout x de I , $f(x) \geq x$.

(b) Démontrer que , pour tout x de I , $f(x) = x$.

4°)Examiner le cas où $f(0) = 1$.

5°)Déduire de cette étude que les seules fonctions satisfont à la condition énoncée sont les fonctions u et v

6°)Montrer que chacune des fonctions : $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est définie sur $[0,1]$, est à valeurs dans $[0,1]$ vérifie : $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$ pour tous x et y réels de $[0,1]$

EXERCICE N°16

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ f(x)=0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

On pose : $g(x) = 2f(x) - f(x-1)$ et $h(x) = g(x-1) + 2g(x-2) + \ldots + 2009\,g(x-2009)$.

Calculer $h(\sqrt{2009})$.

EXERCICE N°17

On désigne par $E(x)$: la partie entière de nombre réel x

1°)Montrer que , pour tout réel x : $2E(x) \leq E(2x) \leq 1 + 2E(x)$

2°)Montrer que , pour tout réel x : $E\left(\dfrac{E(2x)}{2}\right) = E(x)$

EXERCICE N°18

La figure 2 est la représentation graphique d'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$. Les deux autres courbes sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $f(x) = u(x+a)$ et $g(x)=u(x)+b$ où a et b sont des réels.

Trouver les courbes représentatives des fonctions f et g et donner la valeur des réels a et b.

Figure 1

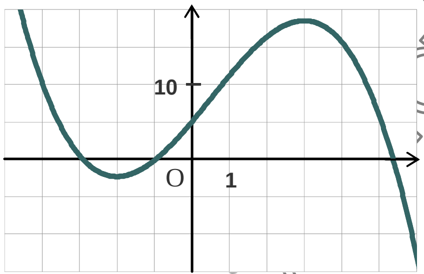


Figure 2

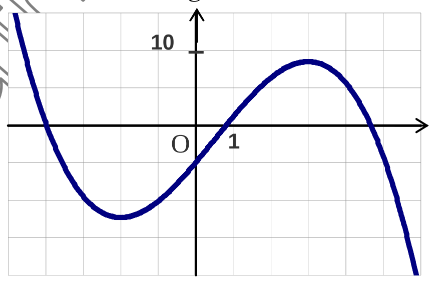
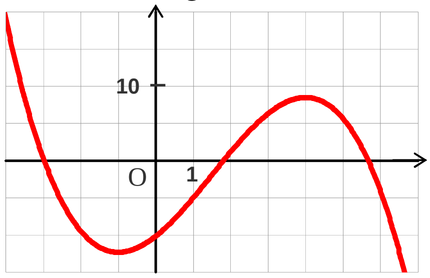
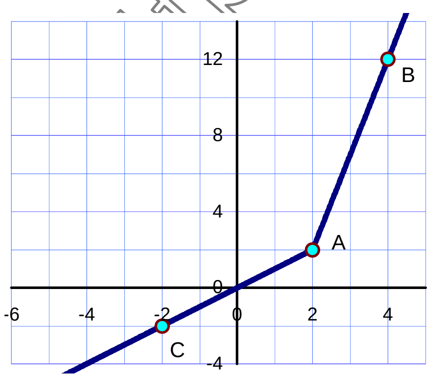


Figure 3



EXERCICE N°19



f est une fonction affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = a|2-x| + bx + c$

1. Déterminer les réels a, b et c sachant que la courbe représentative de la fonction f est donnée ci-contre.
2. Exprimer $f(x)$ sans utiliser la notation valeur absolue.