EXERCICE N°1

1°)Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_0 = 3i + \frac{1}{i} - 2$, $z_1 = (1+i)^2$, $z_2 = (1-2i)^2$, $z_3 = \frac{1}{3+2i}$, $z_4 = \frac{1+2i}{2-3i}$, $z_5 = i^n$, $n \in N$

2°)Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_0 = 3i - 2$, $z_1 = (2+i)^2$, $z_2 = \frac{1}{5+2i}$, $z_3 = \frac{2-i}{i+3}$, $z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

EXERCICE N°2

Soit $(a,b) \in R^* \times R^*$. *On pose :* $z_1 = \frac{a+ib}{a-ib}$ *et* $z_2 = \frac{a-ib}{a+ib}$

Montrer que $z_1 + z_2$ *est réel et que* $z_1 - z_2$ *est imaginaire pur.*

EXERCICE N°3

Soit a , b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que a + b + c = 1.

Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

EXERCICE N°4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ *avec* $x, y \in R$

1°)Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z^2 *est un réel.*

2°) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tel que $|z| = 1$.

3°) Déterminer l'ensemble H des points M d'affixe z tel que $Im(z^2) = Im(z)$.

EXERCICE N°5

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit $Z = \frac{z+1}{z-i}$ *avec* $z = x + iy$ *où* $x , y \in R$

1°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $|Z| = 1$

2°)En déduire l'ensemble des points M , images de z , tels que $\left|\frac{\overline{z}+1}{z-i}\right| = 1$

3°)Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

4°)Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

EXERCICE N°6

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteur non nul d'affixe respectives* $z_{\vec{u}}$ *et* $z_{\vec{v}}$.

1°)Montrer que : $z_{\vec{u}}.\overline{z_{\vec{v}}} = \vec{u}.\vec{v} - i\,det(\vec{u},\vec{v})$

2°)En déduire que :

i. $\vec{u} // \vec{v}$ *équivaut à* $z_{\vec{u}}.\overline{z_{\vec{v}}} \in R$.

ii. $\vec{u} \perp \vec{v}$ *équivaut à* $z_{\vec{u}}.\overline{z_{\vec{v}}} \in iR$.

3°)Application : Soit A , B et M trois points d'affixes respectives 1 + i , 1 et z.

a) *Déterminer l'ensemble des points M tel que ABM est un triangle rectangle en M.*

b) *Déterminer l'ensemble des points M tel que les points A , B et M sont alignés.*

EXERCICE N°7

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Partie A : *Soit z un nombre complexe et* $f(z) = z^2 + z + 1$

1°)Résoudre dans C l'équations : $s^2 = 2$ *et* $t^2 = -3$

2°)Vérifier que : $4f(z) = (2z+1)^2 + 3$

3°)Résoudre alors dans C l'équation : f(z) = 0.

4°) Montrer que si $f(z_0)=0$ *alors* $f(\overline{z_0})=0$

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que f(z) soit un réel.

Partie B :

1°)Résoudre dans C l'équation : (E): $z^3=1$ *.(On note par j la racine de partie imaginaire positive.)*

2°) Ecrire les racines de (E) sous formes trigonométriques.

3°)Calculer j² et 1 + j + j².

4°)Montrer que : $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+cj+bj^2)=a^3+b^3+c^3-3abc$ *.*

(avec a, b et c des nombres complexes)

5°)On considère les points A , B , C d'affixes respectifs a , b et c .

Montrer que les relations : $\begin{cases} a+bj+cj^2=0 \\ b+cj+aj^2=0 \\ c+aj+bj^2=0 \end{cases}$ *sont équivalentes et sont conditions nécessaires et suffisantes pour que le triangle ABC soit équilatérale .*

EXERCICE N°8

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe non nul z, dans chacun des cas suivantes

$arg(z)\equiv 0[2\pi]$, $arg(z)\equiv \pi[2\pi]$, $arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $arg(z)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $arg(z)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $arg(z)\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

$arg(z)\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$, $arg(z)\equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

EXERCICE N°9

Ecrire le nombres complexes suivants sous leurs formes trigonométriques.

$1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$, $1+i$, $\frac{1}{1+i}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, $(1-i\sqrt{3})^{2009}$, $\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}$,

$\sin\frac{\pi}{11}+i\cos\frac{\pi}{11}$, $1-i\tan\frac{\pi}{11}$, $1+\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}$

EXERCICE N°10

Soit : $z=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$

1°)Soit z'= (1+i)z . Ecrire z' sous la forme cartésienne puis sous la forme trigonométrique

2°)En déduire z sous leurs formes trigonométriques.

3°)En déduire alors la valeurs de $\sin\frac{\pi}{12}$ *et* $\cos\frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°11

Soit : $z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

1°) Ecrire z sous la forme trigonométrique

2°) Ecrire z sous la forme cartésienne

3°) En déduire alors la valeurs de $\sin\frac{\pi}{12}$ *et* $\cos\frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°12

Soit $\varphi\in[0,\pi]$*. Ecrire z sous forme trigonométrique.* $z=\sin\varphi+i\cos\varphi$, $z=1+\cos\varphi-i\sin\varphi$, $z=\frac{1-i}{\sin\varphi-i\cos\varphi}$

EXERCICE N°13

On donne le nombre complexe $a=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1°) Exprimer a² sous forme algébrique

2°)En déduire a² sous forme trigonométriques.

3°) En déduire a sous forme trigonométriques.

4°)En déduire le valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8}$

5°)Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que a²z soit un réel.