SEMAINE DES SUITES REELLES

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

Exercice n°02

Soit a un réel strictement positif.

On considère la suite U définie sur N^* *par* $U_1 \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$ *et* $U_{n+1} = U_n - \frac{U^2{}_n}{a}$

1. *Montrer que pour tout n de* N^* : $0 < U_n < \frac{a}{2}$.
2. *Montrer que U est convergente et calculer sa limite.*
3. *Soit pour tout n de* N^* : $V_n = nU_n$
   a. *Montrer que pour tout n de* N^* : $V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)}{a}\left(\frac{a}{n+1} - U_n\right)U_n$
   b. *Montrer que pour tout n de* N^* : $U_n < \frac{a}{n+1}$
   c. *En déduire que V est convergente. On note* ℓ *sa limite.*
   d. *Montrer que :* $0 < \ell \le a$.
4. *Soient pour tout n de* N^* : $W_n = \frac{1}{a - U_n}$ *et* $H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$
   a. *Montrer que W est décroissante*
   b. *Vérifier que pour tout n de* N^* : $W_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$
   c. *En déduire que* $H_n = \frac{n+1}{nV_{n+1}} - \frac{1}{nU_1}$
   d. *Vérifier alors que* $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = \frac{1}{\ell}$
   e. *Montrer que pour tout n de* N^* : $W_{2n} \le 2H_{2n} - H_n \le W_{n+1}$
   f. *En déduire que :* $\ell = a$

Correction d'exercice n°01

1. *On a pour tout n de* N^* : $U_{n+1} - \frac{a}{2} = \frac{1}{a}\underbrace{\left(-U_n{}^2 + aU_n - \frac{a^2}{2}\right)}_{\Delta = a^2 - 2a^2 = -a^2 < 0}$ *alors* $U_{n+1} < \frac{a}{2}$

Donc $U_n < \frac{a}{2}$ *pour tout* $n \ge 2$ *or* $U_1 < \frac{a}{2}$ *alors* $U_n < \frac{a}{2}$ *pour tout n de* N^*.

Montrons par récurrence que pour tout n de N^* : $U_n > 0$

-Pour $n=1$, on a $U_1 > 0$

-Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $U_n > 0$. Montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_{n+1} = \frac{U_n}{2}(a - U_n)$

Or $U_n < \frac{a}{2} < a$ et $U_n > 0$ d'âpres hypothèse de récurrence

Alors $U_{n+1} > 0$

Conclusion : Pour tout n de N^* : $0 < U_n < \frac{a}{2}$

2. Pour tout n de N^* : $U_{n+1} - U_n = -\frac{U^2{}_n}{a} < 0$ alors U est décroissante

On a U est décroissante et minoré par 0 alors U est convergente
On note ℓ sa limite.

On a pour tout n de N^* : $U_n \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$ alors $\ell \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = x - \frac{x^2}{a}$

f continue sur R en particulier en $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ et (U_n) est convergente vers $\ell \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$

Alors $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 0$

3.

a- Pour tout n de N^* : $V_{n+1} - V_n = (n+1)U_{n+1} - nU_n = (n+1)U_n - \frac{(n+1)U_n{}^2}{a} - nU_n$

$$V_{n+1} - V_n = U_n - \frac{(n+1)U_n{}^2}{a} = \frac{(n+1)}{a}\left(\frac{a}{n+1} - U_n\right)U_n$$

b- Montrons par récurrence : que pour tout n de N^* : $U_n < \frac{a}{n+1}$

-Pour $n=1$, on a $U_n < \frac{a}{2} = \frac{a}{1+1}$

-Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $U_n < \frac{a}{n+1}$. Montrons que $U_{n+1} < \frac{a}{n+2}$

On a f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ ($f'(x) = \frac{2}{a}\left(\frac{a}{2} - x\right) > 0$) et $U_n \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$

Et comme d'âpres hypothèse de récurrence $U_n < \dfrac{a}{n+1}$ *alors* $f(U_n) < f\left(\dfrac{a}{n+1}\right) = \dfrac{an}{(n+1)^2}$

Or $(n+1)^2 = n^2+2n+1 > n^2+2n = n(n+2)$ *alors* $\dfrac{an}{(n+1)^2} < \dfrac{an}{n(n+2)} = \dfrac{a}{n+2}$ *alors* $U_{n+1} < \dfrac{a}{n+2}$

Conclusion : pour tout n de N^* : $U_n < \dfrac{a}{n+1}$

c- *On a pour tout n de* N^* : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{(n+1)}{a}\left(\dfrac{a}{n+1} - U_n\right)U_n$ *et* $U_n < \dfrac{a}{n+1}$

Alors V est croissante et comme V est majoré par a ($V_n = nU_n < \dfrac{na}{n+1} < a$ *) alors V est convergente.*

d- *On a V est croissante alors pour tout de* N^* : $V_n \geq V_1 = U_1$

Alors $U_1 \leq V_n \leq a$ *donc* $U_1 \leq \ell \leq a$ *or* $U_1 > 0$ *alors* $0 < \ell \leq a$

4. *Pour tout n de* N^* : $W_n = \dfrac{1}{a - U_n}$ *et* $H_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$

a- *On a* (U_n) *est décroissante alors* $a + (-U_n)$ *est croissante*

donc $\left(\dfrac{1}{a-U_n}\right)$ *est décroissante*

b- *Pour tout n de* N^* *: on a*

$$\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n\left(1 - \dfrac{U_n}{a}\right)} - \frac{1}{U_n} = \frac{\dfrac{U_n}{a}}{U_n\left(1 - \dfrac{U_n}{a}\right)} = \frac{1}{a - U_n} = W_n$$

c- *Pour tout n de* N^* *: on a*

$$H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{U_{k+1}} - \frac{1}{U_k} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{\cancel{U_2}} - \frac{1}{U_1}\right) + \left(\frac{1}{\cancel{U_3}} - \frac{1}{\cancel{U_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{\cancel{U_n}}\right)\right]$$

$$H_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{V_{n+1}} - \frac{1}{U_1}\right) = \frac{n+1}{nV_{n+1}} - \frac{1}{nU_1}$$

d- *On a V est convergente vers* ℓ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{nV_{n+1}} - \dfrac{1}{nU_1} = \dfrac{1}{\ell} - 0 = \dfrac{1}{\ell}$

e- $$H_{2n} = \frac{1}{2n}\left(\underbrace{W_1 + W_2 + \dots + W_n}_{nH_n} + W_{n+1} + \dots + W_{2n}\right) = \frac{H_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} W_k$$

Or $n+1 \le k \le 2n$ *et* W *est décroissante alors* $W_{2n} \le W_k \le W_{n+1}$ *donc*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} W_{2n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} W_k \le \sum_{k=n+1}^{2n} W_{n+1} \quad ainsi \quad nW_{2n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} W_k \le nW_{n+1}$$

Conclusion : pour tout n *de* $\mathbb{N}^*$: $W_{2n} \le 2H_{2n} - H_n \le W_{n+1}$

f- *On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = \frac{1}{\ell} \; alors \; \lim_{n\to+\infty} H_{2n} = \frac{1}{\ell}$$

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a - U_n} = \frac{1}{a} \quad alors \quad \lim_{n\to+\infty} W_{2n} = \lim_{n\to+\infty} W_{n+1} = \frac{1}{a}$$

$$Or \; W_{2n} \le 2H_{2n} - H_n \le W_{n+1} \; Alors \; \lim_{n\to+\infty} W_{2n} \le \lim_{n\to+\infty} \left(2H_{2n} - H_n\right) \le \lim_{n\to+\infty} W_{n+1}$$

$$Donc \; \frac{1}{a} \le \frac{2}{\ell} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell} \le \frac{1}{a} \quad alors \quad \ell = a$$

Pour aller plus loin

Soit pour tout n *de* $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \qquad et \qquad T_n = U_1^{\,2} + 2U_2^{\,2} + 3U_3^{\,2} \cdots + nU_n^{\,2}$$

1. *Etablir :* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
2. *Etablir :* $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.