

# LOGARITHME

## Définition

La fonction logarithme népérien, notée  $\ln$  ou (Log) est la primitive sur définie sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en 1.

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a$
$\ln(a_1.a_2...a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$	$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

- $\ln x < 0$  si et seulement si  $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$  si et seulement si  $x = 1$
- $\ln x > 0$  si et seulement si  $x \in ]1, +\infty[$
- La fonction  $x \mapsto \ln x$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls

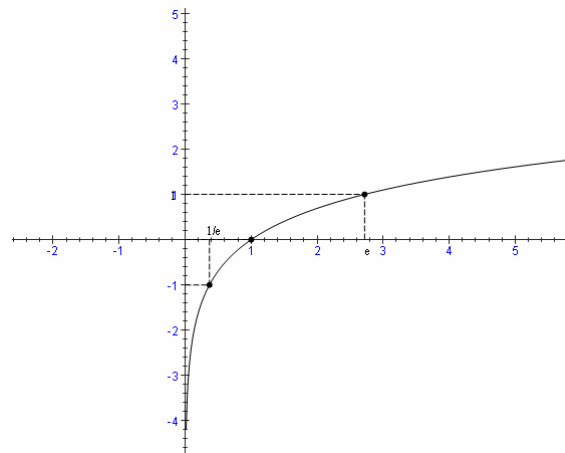
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^m \ln^n x = 0$

## Tableau de variations et courbe de $\ln$

la fonction  $\ln$  réalise une bijection de

$\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$  donc il existe un unique réel, noté  $e$ , vérifiant  $\ln e = 1$ .

$x$	$0$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$



## Dérivées et primitives

### 1°) Dérivée de $\ln u$

Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$ , notée  $\ln u$ , est dérivable sur  $I$  et on a  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

### 2°) Primitive de $\ln u$

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  qui ne s'annule pas sur  $I$

La primitive sur l'intervalle  $I$  de la fonction  $\frac{u'}{u}$  est la fonction  $\ln |u| + c$

# EXPONENTIELLE

## Définition et propriétés

On appelle fonction exponentielle (noté  $e^x$ ) la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

\*) Pour tout réel  $x$  et pour tout réel  $y > 0$ ,  $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

\*) Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$

\*) Pour tout réel  $x > 0$ ,  $e^{\ln(x)} = x$

\*) Pour tout réel  $x$  :  $e^x > 0$

\*) Pour tout réel  $x$  :  $(e^x)' = e^x$

Soit deux réels  $a$  et  $b$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	Pour tout entier $n$ : $e^{na} = (e^a)^n$
Pour tout entier $q \geq 2$ : $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$			Pour tout entier $q \geq 2$ , et tout entier $p$ : $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$

## Les limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$	$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m e^{nx} = 0$

## Théorème

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

\*) La fonction  $f : x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et  $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ ,  $x \in I$

\*) Les primitives sur  $I$  de la fonction  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$  sont les fonctions  $x \mapsto e^{u(x)} + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

## Puissances

Soit un réel  $a > 0$ . Pour tout réel  $b$ , on pose  $a^b = e^{b \ln(a)}$

## Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$  et tous réels  $c$  et  $d$  :

$a^{c+d} = a^c \times a^d$	$(a^c)^d = a^{cd}$	$a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$	$a^c \times b^c = (ab)^c$	$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$
----------------------------	--------------------	-----------------------------	---------------------------	--

## Définition et propriétés

Soit un réel  $a > 0$ .

\*) On appelle fonction exponentielle de base  $a$  la fonction  $x \mapsto a^x$ .

\*) La fonction  $x \mapsto a^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est la fonction  $x \mapsto (\ln a)a^x$

\*) Si  $a > 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

\*) Si  $0 < a < 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

## Définition et propriétés

Soit  $r$  un rationnel.

\*) On appelle fonction puissance  $r$  la fonction  $x \mapsto x^r = e^{r \ln(x)}$ ,  $x > 0$

\*) Si  $r > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0$

\*) Si  $r < 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = +\infty$

\*) La fonction  $x \mapsto x^r$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto r x^{r-1}$

\*) Soit  $r$  un rationnel différent de  $-1$ . Les primitives sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $x \mapsto x^r$  sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

## Théorème

Soit  $r$  un rationnel strictement positif.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$
--	--	--

