Fiche de cours $3^{ème}$informatique
ETUDES DES FONCTIONS

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Le plan est muni d'un repère orthogonale $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (ζf) *sa courbe représentative.*

•Fonction paire
f est dite fonction paire si et seulement si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ *et* $f(-x)=f(x)$
Dans ce cas l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe (ζf)

•Fonction impaire
f est dite fonction impaire si et seulement si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ *et* $f(-x)=-f(x)$
Dans ce cas O *est une centre de symétrie pour la courbe* (ζf)

•Fonction périodique

f est dite fonction périodique , s'il existe in réel t non nul tel que pour tout $x \in D$, $x+t \in D$ *et* $f(x+T)=f(x)$. *t est dite période pour f.*

Le plus petit réel t strictement positif est une période pour f est dite la période de f. On note en générale T.

•Axe de symétrie :

La droite $\Delta : x = a$ *est un axe de symétrie de* (ζf), *si et seulement si, pour tout* $x \in D$, $2a-x \in D$ *et*
$f(2a-x)=f(x)$

•Centre de symétrie :
Le point I(a,b) est un centre de symétrie de (ζf) *si et seulement si, pour tout* $x \in D$, $2a-x \in D$ *et*
$f(2a-x)=2b-f(x)$

Point d'inflexion
Soit x_0 *un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant* x_0.
Si f'' s'annule en x_0 *, en changeant de signe , alors le point* $I(x_0, f(x_0))$ *est un point d'inflexion.*

• Branches paraboliques ,plus générale :

Si :	**Alors :**
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$	(ζf) *admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite* $\left(O,\vec{i}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$	(ζf) *admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite* $\left(O,\vec{j}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$	Δ : $y = b$ *est une asymptote à la courbe* (ζf)
$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$	Δ :$x = a$ *est une asymptote à la courbe* (ζf)
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$	Δ : $y = ax+b$ *est une asymptote oblique à la courbe* (ζf)

•Changement de repère
Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, *soit M(x,y) et* $\Omega(a,b)$

Dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, *soit M(X,Y) et on a* $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ *d'où* $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, (ζf) *a pour équation :* $y = f(x)$

Dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, (ζf) *a pour équation :* $Y = f(a+X)-b$

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *un repère orthogonal .*

Fonctions de référence

Parabole

*)La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.

*) La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x) = a(x-\beta)^2$, $a \neq 0$ est une parabole de sommet $S(\alpha,0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

*) La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 + \beta$, $a \neq 0$ est une parabole de sommet $S(0,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.

*)La fonction f définie sur R par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$,

f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, $a \neq 0$

Donc la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Hyperbole

*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{a}{x}$, $a \neq 0$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} + \beta$ est une hyperbole de centre $I(0,\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = \beta$.

*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{a}{x+\alpha}$, $a \neq 0$ est une hyperbole de centre $I(-\alpha,0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\alpha$ et $y = 0$.

*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$ est une hyperbole de centre $I\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.

Limites remarquables $(a \in R)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x} = a$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$

Dérivés – période $(a \in R^*, b \in R)$

Fonction	Dérivés	Période
$x \mapsto \sin x$	$\forall x \in R$, $(\sin x)' = \cos x$	$T = 2\pi$
$x \mapsto \cos x$	$\forall x \in R$, $(\cos x)' = -\sin x$	$T = 2\pi$
$x \mapsto \tan x$	$\forall x \in R - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$	$T = \pi$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\forall x \in R$, $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$	$T = \dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\forall x \in R$, $(\cos(ax+b))' = a\sin(ax+b)$	$T = \dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	$\forall (ax+b) \in R - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b))$	$T = \dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$