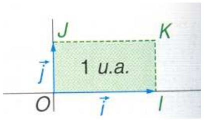
Notion d'intégrale d'une fonction

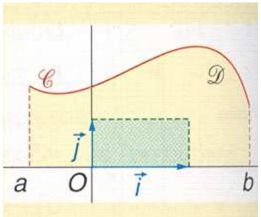
Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on définit les points I, Jet K par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et OIKJ rectangle.
L'aire du rectangle OIKJ définit alors l'unité d'aire (u.a.).



Aire et intégrale d'une fonction positive

Définition :Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et C sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$*

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$, égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.

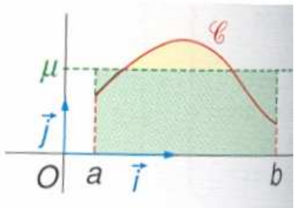


Remarque
a et b sont les bornes de l'intégrale et x est une variable muette :
elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par les lettres t ou u, ainsi : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

Valeur moyenne

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec a < b. La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est donc le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et b - a soit de même aire que le domaine D délimité par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b



Intégrale et primitive

Intégrale d'une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle [a ; b]

Théorème :
Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle I = [a ; b] . On note C, sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On définit sur [a; b] la fonction A : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et on fixe x_0 dans [a ; b]
la fonction A est dérivable sur I et sa dérivée est f

Primitive d'une fonction continue

Théorème
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]
**)La fonction Φ définie sur [a ; b] par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est :L'unique primitive de f sur [a ; b] qui s'annule en a*

Remarques

• La fonction Φ, définie dans le théorème, est donc dérivable sur [a ; b] , de dérivée f
Ce résultat montre que toute fonction continue sur [a ; b] admet une, donc des primitives sur [a ; b]
Plus généralement, toute fonction continue sur un intervalle I quelconque admet des primitives

• Soit F une primitive quelconque de f sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

**)Soit I un intervalle centré en 0 et soit a un réel de I.*

- *Si f est impaire alors* $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$
- *Si f est paire alors* $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- *Si f périodique de période T alors* $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel.
Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (k.f)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

Intégrales et inégalités

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de , et a, b deux réels appartenant à I.

Si $a \le b$ *et* $f \ge 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \ge 0.$	*Si* $a \le b$ *et* $f \le 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \le 0.$
Si $a \ge b$ *et* $f \ge 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \le 0.$	*Si* $a \ge b$ *et* $f \le 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \ge 0.$

Conservation de l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur [a ; b]. Si $f \le g$ *sur [a ; b], c'est-à-dire si, pour tout réel x de [a ; b],* $f(x) \le g(x)$ *, alors* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.

- *Si* $a \le b$ *et s'il existe deux réels m et M tels que* $m \le f(x) \le M$*, pour tout réel x de [a ; b]*

alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

- *S'il existe un réel M positif tel que* $|\, f \,| \le M$ *sur I, alors* $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le M \,|\, b-a \,|$

Intégration par parties

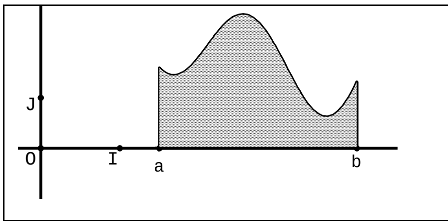
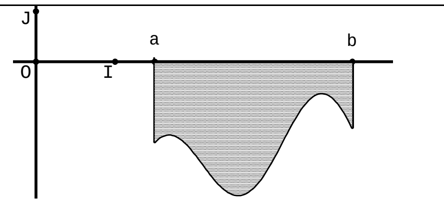
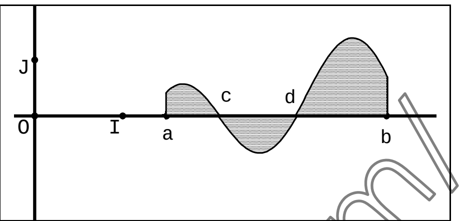
Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$

Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues, a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

l'aire en u.a. du domaine limité par les courbes C_f et C_g sur [a, b] est le réel $\displaystyle\int_a^b |g(t)-f(t)|dt$

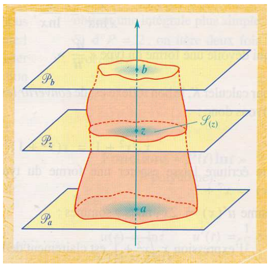
		
$A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$	$A = -\displaystyle\int_a^b f(x)dx$	$A = \displaystyle\int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$

Volume d'un solide

L'espace est muni d'un repère orthonormal (0, J, J, K) et l'unité de volume (u.v.) est le volume du cube construit sur (0, J, J, K).

Théorème

On considère un solide (Σ) limité par les plans parallèles d'équations :
$z = a$ *et* $z = b$ $(a \leq b)$



$z = a$ *et* $z = b$ $(a \leq b)$.
Pour tout z $(a \leq z \leq b)$*, on note :*

- *P_z le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z ;*
- *S_z l'aire de la section du solide par le plan P_z.*

Lorsque S est une fonction continue sur [a, b] , le volume V du solide est calculé (en u.v.) par :

$$V = \int_a^b \mathscr{S}(z)dz.$$

❖ *Soit f une fonction continue et positive sur [a,b]. le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc* $\overset{\frown}{AB} = \{M(x,y) /\ y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ *autour de l'axe* $(O,\vec{i})$ *est le réel* $V = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx$