Fiche de cours $3^{ème}$ *Maths*

PRODUIT SCA-VECTORIELLE

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

Produit scalaire dans l'espace.

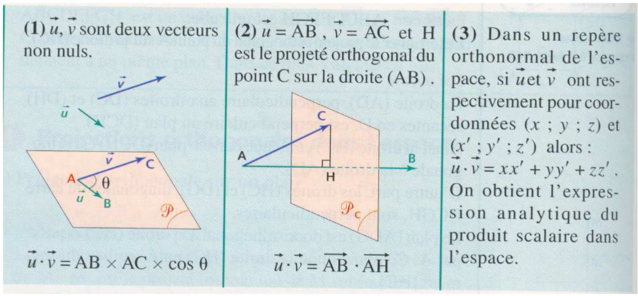
Définition

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs et les point O , M , N tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *le réel noté* $\vec{u}.\vec{v}$ *et défini comme suit :*

♦*Si* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$.

♦*Si* $\vec{u}\neq\vec{0}$ *et* $\vec{v}\neq\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(A\hat{O}B)$



Conséquence

1°) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ *où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).*

2°) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

3°) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

4) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs et a et b deux réels.*

$\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$	$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$	$(a\vec{u}).(b\vec{v})=ab(\vec{u}.\vec{v})$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$		$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$		$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Inégalité de Schwarz et de Minkowski

Soit $\vec{u}$ *et,* $\vec{v}$ *deux vecteurs.*

1°) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ *(Inégalité de Schwarz)*

et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*

2°) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ *(Inégalité de Minkowski)*

et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires et du même sens*

Base orthonormée

♦*Une base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dite orthogonale si les vecteurs* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont orthogonaux deux à deux.*

♦*Une base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dite orthonormé si les vecteurs* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont unitaires et orthogonaux deux à deux.*

♦*Un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthogonale si la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est orthogonale*

♦*Un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthonormé si la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est orthonormé.*

Vecteur normal à un plan

♦*On dit que le vecteur* $\vec{n}$ *est normal au plan P si la droite* $D(A,\vec{n})\perp P$

♦*Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal* $\vec{n}$

♦$\vec{n}$ *est normal à* $P(O,\vec{u},\vec{v})$ *, si et seulement si* $\vec{n}.\vec{u}=0$ *et* $\vec{n}.\vec{v}=0$

♦ $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ *sont normaux à un même plan , si et seulement si, ils sont colinéaires.*

♦*L'espace est muni d'une base orthonormé* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ *alors*

i. $\vec{u}.\vec{v} = aa'+bb'+cc'$

ii. $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

♦*Droite Droite :* $D(A,\vec{u}) \perp D(B,\vec{v})$ *si et seulement si* $\vec{u}.\vec{v} = 0$ •

♦*Plan Plan :* $P(A,\vec{n}) \perp Q(B,\vec{n'})$ *si et seulement si* $\vec{n}.\vec{n'} = 0$

Produit vectoriel dans l'espace.

Pour tout base $(\vec{i},\vec{j})$ *de plan et tout réel d >0, il existe un unique vecteur* $\vec{k}$ *vérifiant :* $\|\vec{k}\| = d$, $\vec{k}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{j} = 0$ *et la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est direct.*

Définition :

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *deux vecteurs .*

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ *par* $\vec{v}$ *, le vecteur défini comme suite :*

▪*Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires alors* $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

▪*Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires alors :*

i. $\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$ *et* $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.

ii. $(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v})$ *est une base direct.*

iii. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| sin(B\hat{A}C)$

Conséquences et propriétés

i. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

ii. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *, si et seulement si ,* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*

iii. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\vec{k}$ *où* $\vec{k}$ *unitaire et normale au plan (ABC)*

iv. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

v. $a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab(\vec{u} \wedge \vec{v})$

vi. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

vii. *L'espace est muni d'une base orthonormé direct* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *.Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ *alors :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$$

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *des vecteurs de l'espace.*

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$	*L'aire du triangle ABD est égale à :* $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$
Le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à : $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}\right|$	*Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à :* $\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}\right|$