Fiche de cours *3ème Maths*

ETUDES DES FONCTIONS

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

Le plan est muni d'un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (ζf) *sa courbe représentative.*

•Fonction paire

f est dite fonction paire si et seulement si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ *et* $f(-x)=f(x)$

Dans ce cas l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe (ζf)

•Fonction impaire

f est dite fonction impaire si et seulement si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ *et* $f(-x)=-f(x)$

Dans ce cas O *est une centre de symétrie pour la courbe* (ζf)

•Fonction périodique

f est dite fonction périodique , s'il existe in réel t non nul tel que pour tout $x \in D$, $x+t \in D$ *et* $f(x+T)=f(x)$. *t est dite période pour f.*

Le plus petit réel t strictement positif est une période pour f est dite la période de f. On note en générale T.

•Axe de symétrie :

La droite $\Delta : x = a$ *est un axe de symétrie de* (ζf), *si et seulement si, pour tout* $x \in D$, $2a-x \in D$ *et* $f(2a-x)=f(x)$

•Centre de symétrie :

Le point I(a,b) est un centre de symétrie de (ζf) *si et seulement si, pour tout* $x \in D$, $2a-x \in D$ *et* $f(2a-x)=2b-f(x)$

•Domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire

*⊗Pour étudier les variations d'une fonction **paire** ou **impaire** définie sur D, il suffit de l'étudier sur l'un des ensembles :* $D_+ = D \cap R_+$ *ou* $D_- = D \cap R_-$

*⊗Pour étudier les variations d'une fonction **de centre de symétrie I(a,b)** ou **d'axe de symétrie x = a** définie sur D, il suffit de l'étudier sur l'un des ensembles :* $D_+ = D \cap [a,+\infty[$ *ou* $D_- = D \cap]-\infty,a]$

*⊗Pour étudier les variations d'une fonction **t-périodique** définie sur D, il suffit de l'étudier sur l'un des ensembles :* $D_k = I_k \cap D$ *où* $a \in R$, $k \in Z$ *et* $I_k = [a+kt, a+(k+1)t[$ *et on a* $D = \bigcup_{k \in Z} D_k$

Exemple : *Soit f une fonction définie sur* $[-10,10]$, *paire et de période 2.*

Déterminer un domaine d'étude D_E *de f.*

On a : f est paire alors $D'_E = [-10,10] \cap [0,+\infty[= [0,10]$ *et du plus on a f 2-périodique alors* $D_E = [0,2[$

•Fonction polynôme :

Soit $f : x \mapsto a^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *avec* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ *et* $n \in N^* - \{1\}$

On a $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ *alors* (ζf) *admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite* $(O,\vec{j})$

•Fonction $\sqrt{ax+b}$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$ *avec* $a \neq 0$

On a $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ *alors* (ζf) *admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite* (O,i)

• Branches paraboliques ,plus générale :

Si :	***Alors :***
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	(ζf) *admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite* $(O,\vec{i})$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ *ou* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	(ζf) *admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite* $(O,\vec{j})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	Δ : $y=b$ est une asymptote à la courbe (ζf)
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$	Δ : $x=a$ est une asymptote à la courbe (ζf)
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-ax-b\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-ax-b\right)=0$	Δ : $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe (ζf)

•Image d'un courbe par une transformation du plan

Relation entre f et g	**Nature de transformation**	
$g: x\mapsto f(x)+b$	Translation de vecteur $\vec{u}=b\vec{j}$	$(\zeta g)=t_{\vec{u}}((\zeta f))$
$g: x\mapsto f(x-a)$	Translation de vecteur $\vec{u}=a\vec{i}$	$(\zeta g)=t_{\vec{u}}((\zeta f))$
$g: x\mapsto f(x-a)+b$	Translation de vecteur $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$	$(\zeta g)=t_{\vec{u}}((\zeta f))$
$g: x\mapsto kf\left(\dfrac{x}{k}\right)$	Homothétie de centre O et de rapport k	$(\zeta g)=h_{(O,k)}((\zeta f))$
$g: x\mapsto kf\left(\dfrac{x+a(k-1)}{k}\right)+b(1-k)$	Homothétie de centre $\Omega(a,b)$ et de rapport k	$(\zeta g)=h_{(\Omega,k)}((\zeta f))$
$g: x\mapsto -f(x)$	Symétrie orthogonale d'axe $(xx')=(O,\vec{i})$	$(\zeta g)=S_{(xx')}((\zeta f))$

•Changement de repère

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, *soit* $M(x,y)$ *et* $\Omega(a,b)$

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, *soit* $M(X,Y)$ *et on a* $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$ *d'où* $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, (ζf) *a pour équation :* $y=f(x)$

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, (ζf) *a pour équation :* $Y=f(a+X)-b$