Séries d'exercices *3ème Maths*
FONCTIONS DERIVES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie sur R par $f(x)=x^2-2|x-1|$

1°)Etudier la dérivabilité de f en 1.
2°)Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de chacun extrema.

EXERCICE N°2

Soit la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{2x^2-3x+a}{x-2}$ *où a est un paramètre réel. On note* (ζ_a) *la courbe représentative de* f_m *dans le plan rapporté à un repère orthonormé R=*$(O,\vec{i},\vec{j})$

1°)Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-2x-1)$*. Interpréter graphiquement le résultat.*

2°) Dresser le tableau de variations de f_0 *.*
3°) Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a *admet un maximum et un minimum ?*
4°)Exprimer en fonction de a les cordonnées des deux points correspondants de (ζ_a) *et déterminer l'ensemble de ces points quand m varie.*
4°)Soit K le point où (ζ_a) *coupe l'axe des ordonnées. Ecrire l'équation de la tangente en K à la courbe* (ζ_a)*et montrer que cette tangente coupe l'asymptote oblique de* (ζ_a) *en un point fixe T dont on donnera les cordonnées.*

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie par : $f_a(x)=\dfrac{x^2-ax}{x^2-4x+3}$ *où* $a\in R$

Déterminer le réel a pour lesquels f_a *:*
1°)N'admet pas d'extremums.
2°)Admet un maximum et un minimum.
3°)Admet uniquement un minimum.

EXERCICE N°4

Soit ABC un triangle équilatéral de coté a.
Soit M∈ [BC] \ {B , C}, H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC), on pose BM=x .
1°))Exprimer en fonction de x l'aire A(x) du quadrilatère AHMK .
2°)Déterminer x pour que l'aire soit maximal .

EXERCICE N°5

Discuter suivant les valeurs de a, le nombre d'extremums de la fonction f_a *définie par :*

$f_a(x)=\dfrac{2x^2+ax}{x^2-1}$ *où* $a\in R$

EXERCICE N°6

Première partie

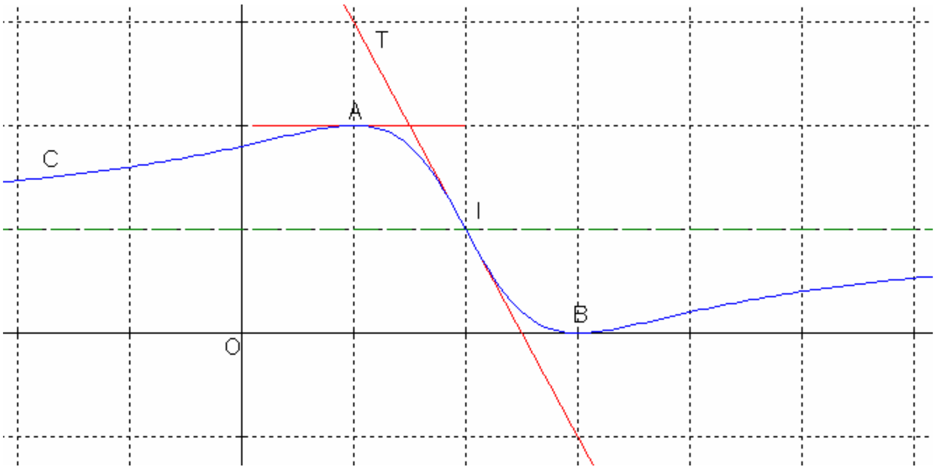
Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+5}$ *définie sur R.*

Calculer les réels a et b de sorte que la courbe (C) représentative de f passe par le point I(2,1) et admette au point I une tangente parallèle à la droite d'équation y = - 2 x.

Deuxième partie

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$ *définie sur R*

Le graphique ci-dessous donne la courbe (C) représentative de f , ainsi que les tracés de l'asymptote et d'une tangente (T) (unités : 2 cm).

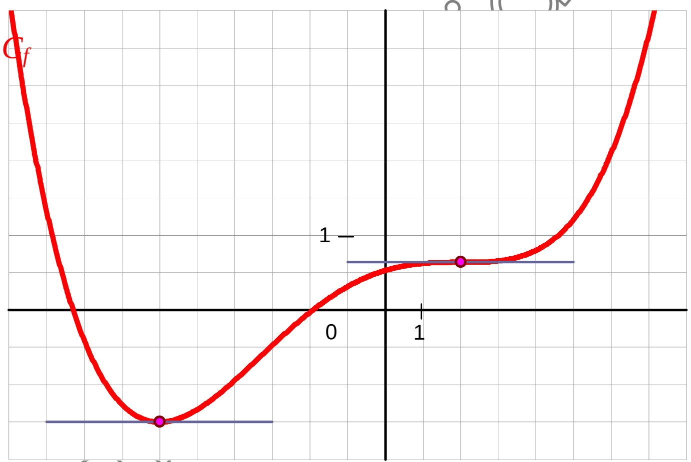


1°)Etudier les limites de f aux bornes du domaine.
2°)Etudier les variations de f.
3°)Quelle est l'équation de la tangente à (C) au point I ?

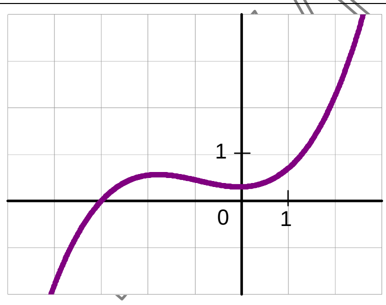
EXERCICE N°7

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur R dans un repère du plan.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe (C_f) vérifie les propriétés suivantes :

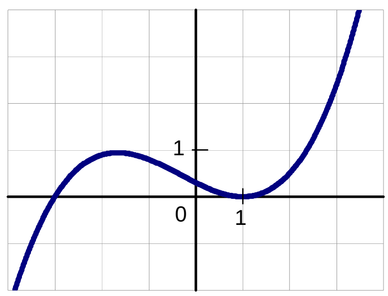
- *Les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse -3 et 1 sont parallèles à l'axe des abscisses ;*
- *la tangente à la courbe (C_f) au point de coordonnées $\left(3, \frac{21}{10}\right)$ passe par le point de coordonnées $\left(4, \frac{45}{10}\right)$.*



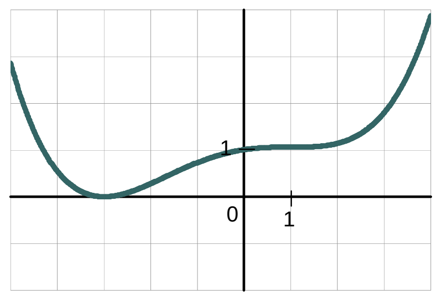
1°)Donner les valeurs de f '(-3) , f '(1) et f '(3) .
2°)Résoudre dans R l'inéquation : f '(x) > 0
3°)Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée f ' de f sur R.
Déterminer la courbe associée à la fonction f '. Vous expliquerez les raisons de votre choix.



Courbe 1



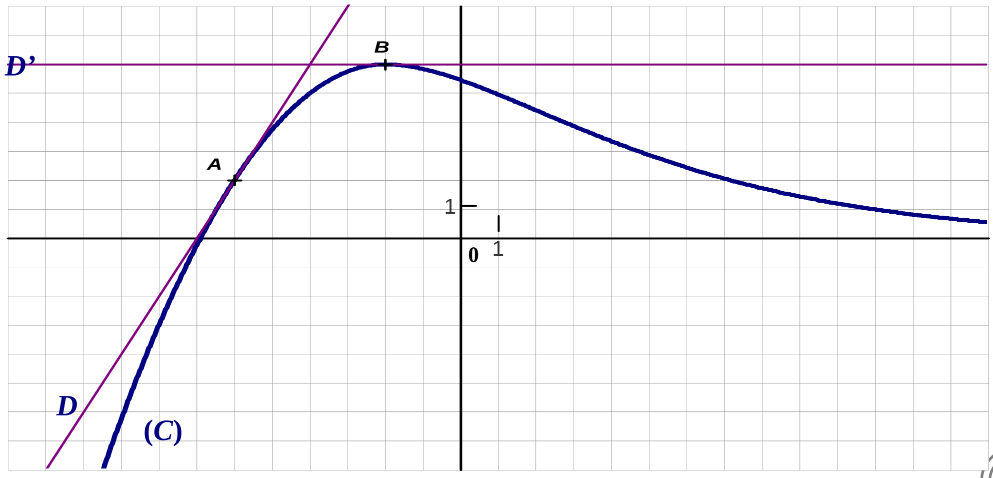
Courbe 2



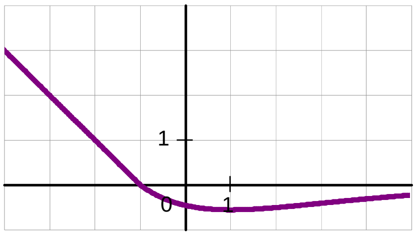
Courbe 3

EXERCICE N°8

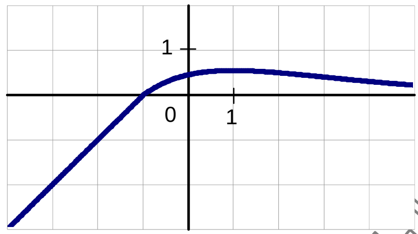
Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe (C) donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan.
Cette courbe passe par les points $A(-3 ; 1)$ et $B(-1 ; 3)$.
Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B et sont sécantes au point d'abscisse -2.



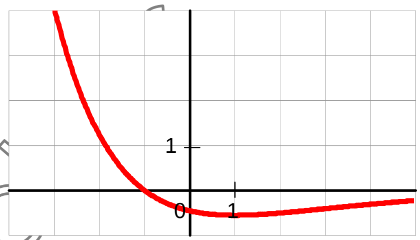
1°)Déterminer graphiquement $f\,'(-3)$ et $f\,'(-1)$.
2°)Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée $f\,'$ de f sur R.
Déterminer la courbe associée à la fonction $f\,'$. Vous expliquerez les raisons de votre choix.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

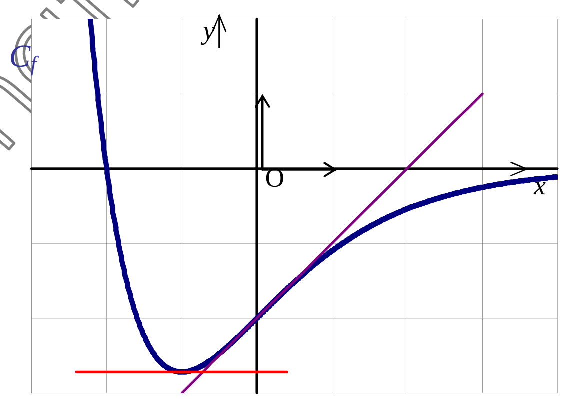
3°)Soit g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{31}{10},+\infty\right[$ *par* $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

a) *Donner les variations de la fonction g.*
b) *Calculer $g\,'(-3)$.*

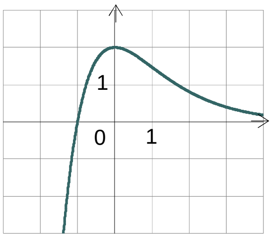
EXERCICE N°9

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur R dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note $f\,'$ la fonction dérivée de f.
La courbe (C_f) vérifie les propriétés suivantes :

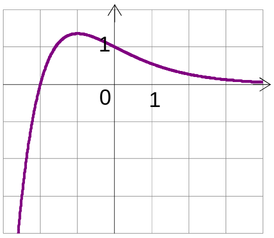
- *Les points de coordonnées respectives (-2,0) et (0,-2) appartiennent à la courbe tracée ;*
- *la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses ;*
- *la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en x = 2.*



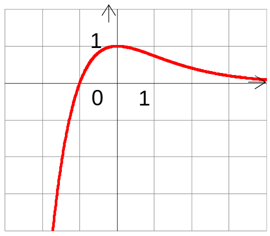
1°)Donner les valeurs de $f(0)$, $f'(-1)$,et $f'(0)$.
2°)Parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée $f\,'$ de f sur R.
Vous expliquerez les raisons de votre choix.



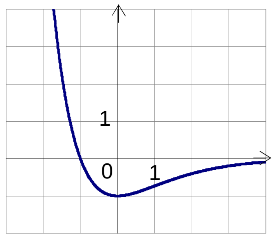
☐ *Figure 1*



☐ *Figure 2*



☐ *Figure 3*



☐ *Figure 4*

Déterminer la courbe associée à la fonction f '. Vous expliquerez les raisons de votre choix.

EXERCICE N°10

Soit f une fonction dérivable sur I = [0 ; 1 [, ne s'annulant pas sur I, telle que, $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{pour tout réel } x \in I, \quad f'(x) = f^2(x) \end{cases}$

Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = f^2(x) + \dfrac{1}{f^2(x)}$

1° a) Démontrer que pour tout réel x de I : $g'(x) = 2f^3(x) - \dfrac{2}{f(x)}$

b) A l'aide de la meilleure approximation affine locale de g au voisinage de 0, déterminer une valeur approchée de g(0,01).

2°)A l'aide de la meilleure approximation affine locale de f au voisinage de 0, déterminer une valeur approchée de f(0,01). En déduire une autre valeur approchée de g(0,01).

EXERCICE N°11

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Soit (ζf) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°)Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de chacun extrema.

2°)Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet trois solutions a , b et c tel que $-2 < a < -1 < b < 1 < c < 2$

3°)Montrer que pour tout $x \in \{a, b, c\}$: $f'(x) \neq 0$

4°)Montrer que pour tout x de R : $f'(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$

5°)Montrer que : $\dfrac{a}{f'(a)} + \dfrac{b}{f'(b)} + \dfrac{c}{f'(c)} = 0$

6°)Montrer que pour tout $x \in R - \{a, b, c\}$ *on a :* $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c}$

7°)En déduire que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = -\dfrac{f'(0)}{f(0)} = -3$ *et* $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \left(\dfrac{f'(0)}{f(0)}\right)^2 - \dfrac{f''(0)}{f(0)} = 9$

8°)Calculer la valeur de : $\dfrac{1}{(a^3-1)^2} + \dfrac{1}{(b^3-1)^2} + \dfrac{1}{(c^3-1)^2}$