EXERCICE N°1

Sans utiliser une calculatrice, calculer le réel :

1°) $\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{7}$

2°) $\tan\frac{\pi}{9} + \tan\frac{2\pi}{9} + \tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{4\pi}{9} + \tan\frac{5\pi}{9} + \tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{7\pi}{9} + \tan\frac{8\pi}{9}$

3°) $\cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5}$

4°) $\tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12} + \cot an\frac{\pi}{5}.\tan\frac{4\pi}{5}$

5°) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

6°) $\cos^2\frac{2\pi}{8}+\cos^2\frac{4\pi}{8}+\cos^2\frac{6\pi}{8}+\cos^2\frac{8\pi}{8}$

7°) $\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°2

1°)*On remarquant que l'on a :* $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, *calculer* $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ *et* $\tan\frac{\pi}{12}$

2°)*Démontrer que l'on a :* $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$

3°) *Calculer* $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8}$ *et* $\tan\frac{5\pi}{8}$

EXERCICE N°3

Soit ACDE un carré direct de côté a = 2 et soit ABC un triangle équilatéral indirect .

1°)*Montrer que ABE est un triangle isocèle et calculer ses angles et en déduire que* $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED})\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$

2°)*Soit H le projeté orthogonale de B sur [ED].*

Calculer BH et en déduire le calcul exact de $\cos\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE N°4

Soit $\wp=\cos x\cos 2x\cos 4x$

1°)*Montrer que :* $8\sin x.\wp=\sin 8x$

2°)*En déduire la valeur de* $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

EXERCICE N°5

Soit $\ell=2\sin x(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$

1°)*Montrer que : pour tout* $a,b\in\mathbb{R}$: $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

2°)*Montrer que* $\ell=\sin 7x-\sin x$

3°)*En déduire la valeur de* $S=\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}+\sin^2\frac{6\pi}{7}$

EXERCICE N°6

1°)*Montrer que pour tout x de R :* $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

2°)*Montrer que pour tout x de R :* $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$

3°) *Montrer que pour tout x de* $R-\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\right\},k\in Z$: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x-1}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

4°) *En déduire que pour tout x de* $R-\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\right\},k\in Z$: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x-1}=\cot an\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE N°7

1°)Montrer que pour tout x de R : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

2°)Calculer alors $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{17\pi}{7} = 0$

3°) Montrer que : pour tout $a,b \in R$: $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

4°)En déduire que $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

EXERCICE N°8

1°)Montrer que pour tous réels a et b différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)$, on a : $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$

2°)Soit x un réel de $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$.

a) Montrer que : $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sin 2x}{2\cos 2x - 1}$

b) Montrer que : $\cos x.(2\cos 2x - 1) = \cos 3x$

c) En déduire que $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3\tan 3x$

EXERCICE N°9

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$

1°)Montrer que $\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin\theta$

2°)Le plan est rapporté à un repère orthonormé, soit le point M de coordonnées cartésiennes x et y tel avec $x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2 + 2\sin\theta}}$ et $y = \frac{1 + \sin\theta}{\sqrt{2 + 2\sin\theta}}$. Vérifier que : $x^2 + y^2 = 1$. Sur quelle ligne se déplacent les points M quand θ varie dans $\left]0, \pi\right[$.

3°)Montrer que $x = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $y = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Quel est l'ensemble des points M quand x varie dans $\left]0, \pi\right[$.

EXERCICE N°10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer le cordonnées polaire des points $A(1, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(-1, \sqrt{3})$ et $D(-1, -\sqrt{3})$

EXERCICE N°10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le carré OABC de centre S tel que les cordonnées cartésiennes respectives de A et C sont $(1, \sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}, 1)$.

1°)Faire une figure.

2°)Déterminer les cordonnées polaires de chacun des points A , C , B et S .

3°)En déduire le valeur de $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A(2,0) , $B(\sqrt{3}, 1)$ et le point C vérifiant $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

1°)Déterminer les cordonnées polaires du point B.

2°)Placer les points A , B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3°)a-Donner la nature du quadrilatère OACB.

b-Déterminer les cordonnées cartésiennes et les cordonnées polaires de C.

c-En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4°)Construire chacun des ensembles suivants :

$E=\left\{M(r,\theta)/ \quad \theta=\frac{\pi}{6} \quad et \quad r\in[1,3]\right\}$ et $F=\left\{M(r,\theta)/ \quad \theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right[\quad et \quad r=2\right\}$

EXERCICE N°12

1°)Résoudre dans R l'équation : $\cos 3x-\cos 4x=0$

2°)Démontrer que pour tout x de R on a : $\begin{cases}\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\\ \cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1\end{cases}$

3°)En déduire que les solutions de l'équations : $8X^4-4X^3-8X^2+3X+1=0$ *sont* $\left\{\cos\frac{2k\pi}{7} / \quad k\in\{0,1,2,3\}\right\}$

EXERCICE N°13

Soit a un réel appartenant à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

1°)Soit $x=\tan a$ *et* $f(x)=\frac{\cos 4a}{\cos^4 a}$.

Déterminer le domaine de définition de f et exprimer f(x) en fonction de x .

2°)Etudier les variations de la fonction f sur sa domaine de définition.

3°)Construire sa courbe ξ *dans un repère orthonormé .*

4°) A Quel valeur de a correspondant les points communs à la courbe ξ *et l'axe (Ox).*

En déduire le valeur $\tan\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{3\pi}{8}$ *et* $\tan\frac{5\pi}{8}$

EXERCICE N°14

Soit pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}$.

Montrer que $\begin{cases}f(x)=2\cos x \quad si \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ f(x)=2\sin x \quad si \quad x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$

EXERCICE N°15

PartieI.

Résoudre les équations suivants dans R puis dans $[0,2\pi]$ *et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions :*

$2\sin x=\sqrt{3}$; $2\cos x=-1$, $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$, $\sin x=\cos x$, $\tan x=-\sqrt{3}$, $\cos x-\sin^2 x-1=0$.

Partie II.

Résoudre les inéquations suivants dans $[0,2\pi]$

$\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2\cos x+1\ge 0$, $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le -1$, $\tan x>-\sqrt{3}$.

EXERCICE N°16

1°) Résoudre dans R : $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

2°)Résoudre dans R : $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$

3°) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$: $\sin x-\sqrt{3}\cos x\ge\sqrt{2}$

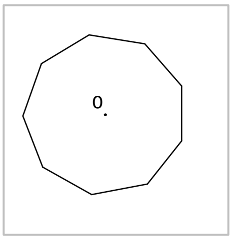
4°) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$: $3\cos x-2\sin^2 x+3=0$

5°) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$: $3\cos x-2\sin^2 x+3\ge 0$

6°)Résoudre dans $[0,2\pi]$: $\frac{2\cos 2x-1}{1+2\cos 2x}\le 0$

EXERCICE N°17

Soit un polygone à n coté de langueur b. Montrer que l'aire s de polygone est $s = \frac{1}{4} n b^2 \cot an \frac{\pi}{n}$



EXERCICE N°18

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin^2 x - 1$ *et* $v(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

1°)Transformer u(x) en $[c - r\cos(2x + \varphi)]$ *où c , r et* φ *sont des réels avec r >0 et* $0 < \varphi < \pi$.

2°)Resoudre dans $[0,\pi]$ *l'équation : u(x) = 1 .*

3°)Montrer que, pour tout réel x, on a : $u(x) = 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4°)Montrer que, pour tout réel x , on a : $v(x) = \sin 3x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

5°) Montrer que, pour tout réel x , on a : $v(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

6°)Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b)Montrer que pour tout x de D : $f(x) = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

c)Résoudre dans $[0,\pi]$, *l'inéquation :* $f(x) < \frac{2}{\sqrt{3}}$

EXERCICE N°19

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 3x}$.

1°)Déterminer le domaine de définition de f (on note D) .

2°)Montrer que , pour tout $x \in D$, $f(x) = \frac{2\cos 2x}{\sin 3x}$

3°)a-Montrer que $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$

b-En déduire alors que : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ *et* $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

4°) a-Résoudre dans R puis dans $]0,2\pi]$, *l'équation :* $\cos x + (\sqrt{2} - 1)\sin x = 1$

b-Résoudre dans $]0,2\pi]$, *l'équation :* $\cos x + (\sqrt{2} - 1)\sin x \le 1$

5°)Etablire que $\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = 0$

EXERCICE N°20

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x}$

1°)Déterminer le domaine D de définition de f .

2°)Montrer que pour tout $x \in D$: $f(x) = 1 + 2\cos 2x$.

3°)a-Résoudre dans R puis dans $]0,2\pi[$: $f(x) = 0$

b-Résoudre dans R puis dans $]0,2\pi[$: $f(x) \leq 0$

4°)Calculer la valeur de $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et en déduire la valeur de* $\sin\frac{\pi}{12}$ *et* $\cos\frac{\pi}{12}$

5°)Soit $x_k = \frac{k\pi}{5}$ *où* $k \in \{1,2,3,4\}$ *Calculer la valeur de* $s = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$

(en utilisons question 2)

6°)En déduire la valeur de $p = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{4\cos\frac{\pi}{5}}$ *.Trouver alors la valeur de* $\cos\frac{\pi}{5}$