

Formules de conversion

Si a , b et c sont les mesures respectives en radians, en degrés et en grades d'un angle donné alors on a :

$$\frac{a}{\pi} = \frac{b}{180} = \frac{c}{200}$$

Longueur d'un arc.

Soit ζ un cercle de centre O et de rayon r .

A et B deux points de cercle ζ tel que $\widehat{AOB} = a$ (radians).

La longueur ℓ de l'arc géométrique intercepté par l'angle a est $\ell = ra$

Cas particulier : $r = 1$, $\ell = a$

Orientation du plan

Il est visible que sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours :

*) L'un de ces sens est dit direct ou positif c'est le sens contraire de celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.

*) L'autre sens est dite indirect ou négatif.

*) Un cercle est dit orienté, si on choisi un sens de parcours sur ce cercle.

*) Le plan est dit orienté, si la convention des sens précédente est adoptée pour tous les cercles du plan.

Cercle trigonométrique.

On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Dans la suite de cours on désigne par ζ un cercle trigonométrique.

Arcs orientés.

*) A et M deux points de ζ . Il y a deux arcs géométriques d'origine A et d'extrémité M dont un seul est parcouru suivant l'orientation du cercle ζ .

Cet arc est appelé arc orienté d'origine A et d'extrémité M et on note \widehat{AM} .

Mesures d'un arc orienté

Soit ζ un cercle trigonométrique et \widehat{AB} un arc orienté.

ℓ la longueur de l'arc géométrique associé.

On appelle mesure de l'arc orienté \widehat{AB} tout réel $\ell + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ et on note $\text{mes } \widehat{AB}$

$\text{mes } \widehat{AB} = \ell + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on le note $\text{mes } \widehat{AB} \equiv \ell [2\pi]$

Longueur de l'arc géométrique

L'arc orienté \widehat{AB} possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la Longueur de l'arc géométrique associé.

Mesure principale d'arc orienté.

On appelle mesure principale d'un arc orienté \widehat{AB} l'unique mesure de cet arc, appartenant à $]-\pi, \pi]$

*) Pour tout point M de ζ et tout réel x , il existe un unique point N de ζ tel que $\text{mes } \widehat{MN} = x$

*) On convient que $\text{mes } \widehat{AA} = 2k\pi$

Propriétés

Pour tous points A , B et C de ζ , on a :

$\text{mes } \widehat{AB} + \text{mes } \widehat{BC} \equiv \text{mes } \widehat{AC} [2\pi]$	$\text{mes } \widehat{AB} \equiv -\text{mes } \widehat{BA} [2\pi]$
--	--

*) Toutes symétrie axiale transforme les mesures des arcs orientés en leurs opposés

*) Toute translation conserve les mesures des arcs orientés.

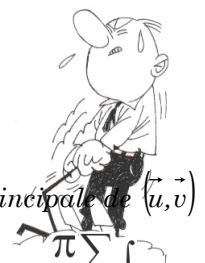
Angles orienté de deux vecteurs

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nul.

Le couple (\vec{u}, \vec{v}) s'appelle un angle orienté des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

$\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \text{mes } \widehat{AB} [2\pi]$ (Notation : $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} [2\pi]$)

*) L'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelée mesure principale de (\vec{u}, \vec{v})



$$*) \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) + \left(\vec{v} \wedge \vec{w} \right) \equiv \left(\vec{u} \wedge \vec{w} \right) [2\pi]$$

$$*) \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv \left(\vec{u}' \wedge \vec{v}' \right) [2\pi] \text{ si et seulement si } \left(\vec{u} \wedge \vec{u}' \right) \equiv \left(\vec{v} \wedge \vec{v}' \right) [2\pi]$$

$\left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv - \left(\vec{v} \wedge \vec{u} \right) [2\pi]$	$\left(-\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv \pi + \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) [2\pi]$	$\left(\vec{u} \wedge -\vec{v} \right) \equiv \pi + \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) [2\pi]$
$\left(-\vec{u} \wedge -\vec{v} \right) \equiv \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) [2\pi]$	$\left(a\vec{u} \wedge b\vec{v} \right) \equiv \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) [2\pi] \text{ si } ab > 0$	$\left(a\vec{u} \wedge b\vec{v} \right) \equiv \pi + \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) [2\pi] \text{ si } ab < 0$

Propriétés

$$*) \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv \left(\vec{u}' \wedge \vec{v}' \right) [2\pi] \text{ si et seulement si } \vec{v} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

$$*) \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv 0 [2\pi] \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

$$*) \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv \pi [2\pi] \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires et de sens opposés.}$$

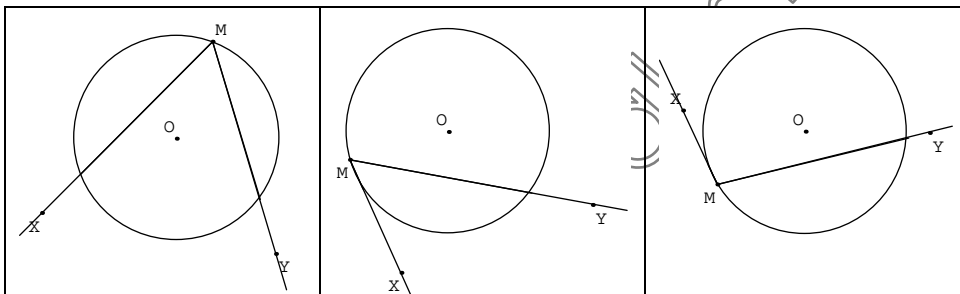
$$*) \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux, si et seulement si } \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$$

$$*) \text{ Soit } ABC \text{ un triangle alors : } \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) + \left(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} \right) + \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} \right) \equiv \pi [2\pi]$$

Définition 1:

Soit $(\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{My})$ un angle orienté de demi-droites. On dit que cet angle est inscrit dans un cercle ζ si et seulement si :

- $M \in \zeta$
- Les deux demi-droites $[Mx)$ et $[My)$ recoupent le cercle ζ , l'une des deux pouvant être tangente à ζ en M .

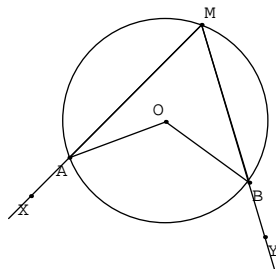


Définition 2

- Soit $(\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{My})$ un angle inscrit dans un cercle ζ de centre O .

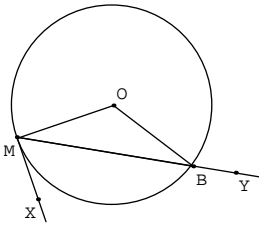
Soient A et B les points où les demi-droites $[Mx)$ et $[My)$ recoupent ζ .

L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est dit angle au centre associé à l'angle inscrit $(\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{My})$.



- Dans le cas où la demi-droite $[Mx)$ est tangente à ζ en M et la demi-droite $[My)$ recoupe ζ en B , l'angle au centre associé à $(\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{My})$ est $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$





Angles inscrits à un même angle au centre

$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$		$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$
$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) [2\pi]$	$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + \pi [2\pi]$	$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) [2\pi]$

Théorème

Soit A et B deux points du plan orienté dans le sens direct, $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et T un point du plan tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta [2\pi]$.

1°) Il existe un seul cercle ζ passant par A et B et tangente à (AT) en A .

2°) Soit $\Gamma = \left\{ M \in \wp / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta [2\pi] \right\}$

*) Si la mesure principale de $\theta \in]\pi, 0[$ alors $\Gamma = \widehat{AB} - \{A, B\}$

*) Si la mesure principale de $\theta \in]0, \pi[$ alors $\Gamma = \widehat{BA} - \{A, B\}$

Définition :

Le plan orienté dans le sens direct

*) On dit qu'une base (\vec{i}, \vec{j}) du plan est orthonormé direct si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

*) On dit qu'une base (\vec{i}, \vec{j}) du plan est orthonormé indirect si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Définition

Le plan orienté dans le sens direct

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nul, et soit \vec{u}' le vecteur vérifiant $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

*) On appelle déterminant de (\vec{u}, \vec{v}) et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le réel $\vec{v} \cdot \vec{u}'$

*) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

