Kenya – PAMO 2018

26^{th} PAN AFRICAN MATHEMATICS OLYMPIAD

Nairobi from 23 to 30 June 2018

Day 1 : Wednesday, June 27, 2018 **Duration : 4 h 30 min**

PROBLEM 1

Find all functions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ such that $(f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$ for all $x, y \in \mathbb{Z}$.

PROBLEM 2

A chess tournament is held with the participation of boys and girls. The girls are twice as many as boys. Each player plays against each other player exactly once. By the end of the tournament, there were no draws and the ratio of girl winnings to boy winnings was $\frac{7}{9}$.
How many players took part at the tournament ?

PROBLEM 3

For any positive integer x, we set

$$g(x) = \text{the largest odd divisor of } x,$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)} & \text{if } x \text{ is even;} \\ 2^{\frac{x+1}{2}} & \text{if } x \text{ is odd.} \end{cases}$$

Consider the sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by $x_1 = 1,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Show that the integer 2018 appears in this sequence, determine the least integer n such that $x_n = 2018$, and determine whether n is unique or not.

Kenya – PAMO 2018

$26^{ièmes}$ **OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES**

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

Jour 1 : Mercredi 27 Juin 2018 **Durée : 4 h 30 min**

Problème 1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que $(f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problème 2

Un tournoi d'échecs est organisé avec la participation de garçons et de filles. Le nombre de filles est le double de celui des garçons. Deux joueurs se rencontrent exactement une fois. A la fin du tournoi, il n'y a eu aucun nul et le rapport des victoires des filles par les victoires des garçons a été $\frac{7}{9}$.
Combien de joueurs ont participé au tournoi ?

Problème 3

Pour tout entier naturel non nul x, on pose

$$g(x) = \text{le plus grand diviseur impair de } x,$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)}, & \text{si } x \text{ est pair;} \\ 2^{\frac{x+1}{2}}, & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 = 1,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que l'entier 2018 apparaît dans cette suite, déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $x_n = 2018$, et déterminer si n est unique ou non.