LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré a_nx^n et b_nx^m respectivement alors

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \;;\; \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} \;;\; \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-2x^4+x-1}{x^2+5x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$

Limites trigonométries

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \;;\; \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x}=a \;;\; \lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2} \;;\; \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{x}=0$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x.\sin(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{x.\sin(x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

Théorème d'encadrement

Soit f , g et h trois fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x)\le h(x)\le g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g = l & (l\in R)\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x_0} h = l$ *(x_0 fini on infini)*

Exemple : $\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On a : $-1\le\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le1$ *alors pour tout* $x>0$: $-x\le x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x$

Alors on a : $\begin{cases} -x\le x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x & \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \\ \lim\limits_{0^+}(-x)=\lim\limits_{0^+}x=0\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x)\ge g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim\limits_{x_0} g=+\infty\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x_0} f=+\infty$

Si $\begin{cases} f(x)\le g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim\limits_{x_0} g=-\infty\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x_0} f=-\infty$ *(x_0 fini on infini)*

Exemple : *Soit f(x) = x².(2+cos(x)). Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $2+\cos x \ge 2+-1$ *alors* $2+\cos x \ge 1$ *ainsi* $f(x)\ge x^2$

On a alors $\begin{cases} f(x)\ge x^2 & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim\limits_{+\infty}x^2=+\infty\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Théorème ; fonction composé

Soit f et g deux fonctions telles que :

$\lim\limits_{x_0} f = y$ *et* $\lim\limits_{y} g = z$ *alors* $\lim\limits_{x_0} g\circ f = z$ *(x_0 , y et z finis ou infinis)*

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1+\pi^2x}{4x}}\right)$

On peut écrire $h = g\circ f$ *avec* $f : x\mapsto\dfrac{1+\pi^2x}{4x}$ *et* $g\mapsto\sqrt{x}$ *et* $h(x)=\sqrt{\dfrac{1+\pi^2x}{4x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\pi^2 x}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi^2 x}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{4}$

et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}} = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

ASYMPTOTE

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

$\Delta : y = b$ est un asymptote horizontale

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = b$

$\Delta : y = ax + b$ est un asymptote oblique

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = \infty$

Branche parabolique de cœfficient directeur a.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$

Branche parabolique de directeur (y'y)

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Branche parabolique de directeur (x'x)