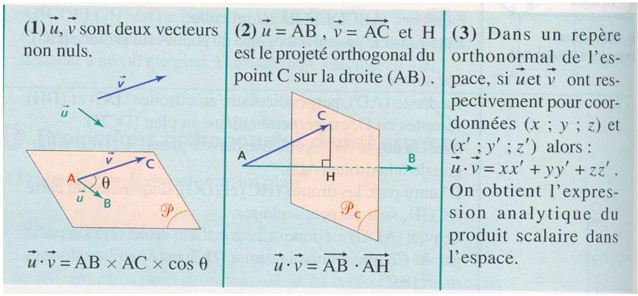
Définition

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs et les point O , M , N tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *le réel noté* $\vec{u}.\vec{v}$ *et défini comme suit :*

♦*Si* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$.

♦*Si* $\vec{u}\neq\vec{0}$ *et* $\vec{v}\neq\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(A\hat{O}B)$


(1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos\theta$

(2) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overline{AB}\cdot\overline{AH}$

(3) Dans un repère orthonormal de l'espace, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ et $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$. On obtient l'expression analytique du produit scalaire dans l'espace.

Conséquence

1°) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ *où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).*

2°) $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

3°) $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

4) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs et a et b deux réels.*

$\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$	$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$	$(a\vec{u}).(b\vec{v})=ab(\vec{u}.\vec{v})$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$		$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$		$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Inégalité de Schwarz et de Minkowski

Soit $\vec{u}$ *et,* $\vec{v}$ *deux vecteurs.*

1°) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ *(Inégalité de Schwarz)*

et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*

2°) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ *(Inégalité de Minkowski)*

et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires et du même sens*

Base orthonormée

♦*Une base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dite orthogonale si les vecteurs* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont orthogonaux deux à deux.*

♦*Une base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dite orthonormé si les vecteurs* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont unitaires et orthogonaux deux à deux.*

♦*Un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthogonale si la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est orthogonale*

♦*Un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthonormé si la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est orthonormé.*

Vecteur normal à un plan

♦*On dit que le vecteur* $\vec{n}$ *est normal au plan P si la droite* $D(A,\vec{n})\perp P$

♦*Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal* $\vec{n}$

♦ $\vec{n}$ *est normal à* $P(O,\vec{u},\vec{v})$ *, si et seulement si* $\vec{n}.\vec{u}=0$ *et* $\vec{n}.\vec{v}=0$

♦ $\vec{n}$ *et* $\vec{n'}$ *sont normaux à un même plan , si et seulement si, ils sont colinéaires.*