Séries d'exercices *4ème sciences*

LOGARITHME

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

EXERCICE N°1

1°)Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $g(x) = x\ln(x) - x + 1$.

a) *Etudier le sens de variations de g*
b) *En déduire le signe de g .*

2°)On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

a) *Etudier les limites de f en* $+\infty$ *et en 1 .*
b) *Dresser le tableau de variation de f .*
c) *Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm)*

EXERCICE N°2

1°)Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$

a) *Etudier les variations de f*
b) *En déduire que pour tout* $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

2°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

a) *Etudier les variations de f*
b) *En déduire que pour tout* $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

3°)Etudier la limite éventuelle en 0^+ *de* $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

EXERCICE N°3

Soit f définie sur $]-1, 1[$ *par* $f(x) = (1-x^2).\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$. *Montrer que f est continue.*

1°)Etudier la parité de f
2°)Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[-1, 1]$.

EXERCICE N°4

Soit g définie sur $R_+^* - \{1\}$ *par* $g(x) = \dfrac{x.\ln(x)}{x-1}$ *et prolongée par continuité en 0 et en 1.*

1°)Que valent g(0), g(1) ?
2°)Etudier la branche infinie de C_g.

EXERCIECE N°5

1°)Déterminer trois réels a , b et c tels que : $\dfrac{2x^2+3x}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ *pour tout réel* $x \neq -2$

2°)Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}dx$.

3°) Calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^2 (4x+3)\mathrm{Log}(x+2)dx$.

EXERCICE N°6

Soient $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2x}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$ *et* $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$.

1°) Calculer $K = 2I + J$ *et* $L = 2I - J$.
2°) En déduire I et J.

EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur $R \setminus \{-1\}$ *par :* $f(x) = x.\ln|x+1| - x^2 + 1$.

1°) a) Déterminer les limites de f(x) quand x tend vers $-\infty$ *et vers -1.*

b) Montrer que pour $x > 0$, on peut écrire : $f(x) = x(x+1)\left(\dfrac{ln(x+1)}{x+1} - \dfrac{x-1}{x}\right)$ et en déduire la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

2°) a) Etudier les variations de la fonction f' dérivée de f.

On vérifiera que : $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x}{(x+1)^2}$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

3°) Etudier les variations de f.

4°) Tracer la courbe (C_f) représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

5°) a) Démontrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes.

b) Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs de chacune des solutions de (E).

c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} des deux solutions de (E).

6°) a) Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = (x^2 - 1).ln(x + 1)$.

Déterminer la fonction dérivée de g.

b) En déduire une primitive de f sur $]-1; +\infty[$.

c) Déterminer l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe (C_f), les axes du repère et la droite d'équation : $x = 1$.

EXERCICE N°8

On considère la fonction f définie sur $[0 ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{ln(x+3)}{x+3}$

1°)Montrer que f est dérivable sur $[0 ;+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f ', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2°)On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

a)Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3°)Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = [ln(x+3)]^2$.

a) Justifier la dérivabilité sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n.

4°)On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?