Séries d'exercices ***2ème sciences***

SUITES REELLES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

EXERCICE N°1

Déterminer l'entier qui figure dans la 2009ème position de la suite infinie suivante :

1°) 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , ……

2°) 4 , 3 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , ……

EXERCICE N°2

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *une suite arithmétique de raison r et de premier terme* U_0.

1°)Calculer u_{10} *sachant que :* $u_0 = 2$ *et* $r = 2$.

2°) Calculer u_0 *sachant que :* $u_5 = 10$ *et* $r = 2$.

3°) Calculer r sachant que : $u_2 = 1$ *et* $u_4 = 8$.

4°)Calculer u_0 *et r sachant que :* $u_7 = 45$ *et* $u_{10} + u_{11} = 132$

EXERCICE N°3

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3}.u_n + \sqrt{3}^{n+1} \end{cases}$

1°)Calculer u_1 , u_2 *et* u_3.

2°)On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{3}^n}$.

Montrer que (v_n) *est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison .*

3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*

EXERCICE N°4

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \end{cases}$

(On suppose que , pour tout entier naturel n : $u_n \neq 3$ *et* $u_n \neq 2$*)*

1°) Calculer u_1 , u_2 *et* u_3. *u est-elle une suite arithmétique ?*

2°) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1 - u_n}{u_n - 2}$.

Montrer que (v_n) *est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison .*

3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*

EXERCICE N°5

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + 2n + u_n \end{cases}$

1°) Calculer u_1 , u_2 *et* u_3. *u est-elle une suite arithmétique ?*

2°) Exprimer u_n *en fonction de n .*

EXERCICE N°6

Soit (u_n) *la suite réelle définie sur* N^* *par : u :* $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$

(On suppose que , pour tout entier naturel n : $u_n \geq 0$*)*

1°) Calculer u_2 , u_3 *et* u_4. *u est-elle une suite arithmétique ?*

2°) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $v_n = u_n^2$

Montrer que (v_n) *est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison .*

3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*

EXERCICE N°7

1°)Calculer les sommes suivantes :

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2007$

$T = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2006$

2°)En déduire la valeur de la somme :

$F = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2006 + 2007$

EXERCICE N°8

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + n + \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in N}$ *est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison .*

EXERCICE N°9

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *une suite géométrique de q et de premier terme* u_0.

1°)Calculer u_{10} *sachant que :* $u_0 = 1$ *et* $q = -2$ *.*
2°) Calculer u_0 *sachant que :* $u_5 = 2$ *et* $q = 8$ *.*
3°) Calculer q sachant que : $u_2 = 7$ *et* $u_4 = 2$ *.*

EXERCICE N°10

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 5.u_n + 8 \end{cases}$

1°) Calculer u_1 *,* u_2 *et* u_3*. u est-elle une suite géométrique ?*
2°) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n + 2$
Montrer que (v_n) *est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .*
3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*

EXERCICE N°11

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4.u_n + 9 \end{cases}$

1°) Calculer u_1 *,* u_2 *et* u_3*. u est-elle une suite géométrique ?*
2°) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - a$ *, où a est un réel .*
Déterminer le réel a pour que (v_n) *soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .*
3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*
4°)Calculer en fonction de n :
$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ *et* $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

EXERCICE N°12

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_1 = 3/4 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

(On suppose que , pour tout entier naturel n , non nul : $u_n \neq 0$ *et* $u_n \neq 1$*)*
1°) Calculer u_2 *,* u_3 *et* u_4*. u est-elle une suite géométrique ?*
2°) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $v_n = \dfrac{1 - 2.u_n}{u_n - 1}$ *.*
Montrer que (v_n) *est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .*
3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*
4°) Calculer en fonction de n : $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$

EXERCICE N°13

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3.u_{n+1} = 2.u_n + 7.3^n \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in N}$ *est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .*

EXERCICE N°14

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par : u :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3.u_n + n \end{cases}$

1°) Calculer u_1 *,* u_2 *et* u_3*. u est-elle une suite géométrique , arithmétique ?*
2°) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - a.n + b$ *, où a , b deux réels .*
Déterminer les réels a et b pour que (v_n) *soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .*
3°)Exprimer alors v_n *puis* u_n *en fonction de n .*
4°)Calculer en fonction de $n \in N^*$ *:* $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ *et* $T_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

EXERCICE N°15

Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite réelle définie par : u : $\begin{cases} u_0 = 4 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \end{cases}$

1°) Calculer u_2 , u_3 et u_4. u est-elle une suite géométrique , arithmétique ?

2°) Montrer que pour tout entier n : on a : $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2} + 3$

3°) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - a$, où a est un réel .
Déterminer le réel a pour que (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .
3°)Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n .

EXERCICE N°16

Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite réelle définie par : u : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_n + 1 \end{cases}$

1°) u est-elle une suite arithmétique ?
2°) $(u_{2n})_{n\in N}$ est-elle une suite arithmétique ?
$(u_{2n+1})_{n\in N}$ est-elle une suite arithmétique ?
3°) Calculer la somme : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{100}$.
4°) Montrer que pour tout entier n : on a : $u_{n+1} = - u_n + n$
5°) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - a.n + b$, où a , b deux réels .
Déterminer les réels a et b pour que (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .
6°) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n .

EXERCICE N°17

Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite réelle définie par : u : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{u_n - 1} \end{cases}$

(On suppose que , pour tout entier naturel n , non nul : $u_n \neq 1$)
1°) Calculer u_1 , u_2 et u_3. u est-elle une suite géométrique , arithmétique ?
2°) Montrer que pour tout entier n : on a : $u_{n+2} = u_n$
3°)Montrer que , pour tout entier naturel n : $u_{n+1} + u_n = 9$
4°)On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - u_n$
Montrer que $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme
et la raison .
5°) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n .

EXERCICE N°18

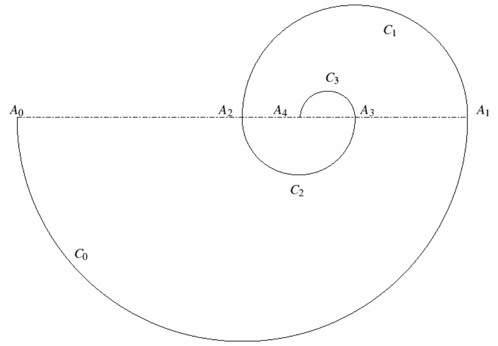
Soit n un entier naturel .On note par :
i_n : le nombre des entiers naturels impairs compris entre 0 et n .
p_n : le nombre des entiers naturels pairs compris entre 0 et n .
1°)Calculer i_0 , p_0 , i_1 , p_1 , i_2 et p_2.
2°)Expliquer pourquoi : $\forall n \in N$: $i_{n+2} = i_n + 1$.
3°)Montrer que : $\forall n \in N$: $i_{n+1} = -i_n + n$.
4°)Soit V la suite réelle définie par : $\forall n \in N$: $v_n = (-1)^n.i_n$
 (a) Montrer que : $\forall n \in N$: $v_{n+1} - v_n = a_n$ où $a_n = n(-1)^{n+1}$.
 (b) Montrer que : $\forall n \in N$: $a_{n+1} + a_n = (-1)^n$.
 (c) Soit , pour tout n entier naturel : $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Montrer que : $s_n = \dfrac{1+(-1)^n}{4} - \dfrac{1}{2}a_{n+1}$.

 (d) En déduire v_n puis i_n en fonction de n .
5°)En déduire p_n en fonction de n.
6°)En déduire le nombre des entiers naturels impairs (respectivement pairs)compris entre p et q. où p et q deux entiers naturels ($p \leq q$).

EXERCICE N°19

Un paysagiste doit créer dans un jardin une spirale plantée de petits arbustes.
Il veut connaître la longueur de cette spirale pour évaluer le nombre d'arbustes à planter.
Voici le schéma qu'il dresse :



Cette spirale est constituée de demi-cercles construits de la manière suivante :
- le diamètre $[A_0A_1]$ du demi-cercle C_0 a pour milieu A_2 ;
- le diamètre $[A_1A_2]$ du demi-cercle C_1 a pour milieu A_3 ;
Ainsi de suite on construit les demi-cercles Cn (n est un entier naturel).
L'unité de longueur est le mètre. On donne $A_0A_1 = 100$.
1. On note ln la longueur du demi-cercle Cn. (l'unité est le mètre).
(a) Calculer l_0, l_1, l_2 et l_3.
(b) Exprimer ln+1 en fonction de ln. Indiquer la nature de la suite (ln) en précisant sa raison.
(c) Montrer que, pour tout entier n, $ln = 50\,\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Le paysagiste décide de ne tracer que les huit demi-cercles C_0, C_1, C_2, … , C_7. On appelle L la longueur de la spirale obtenue avec ces huit demi-cercles.
(a) Calculer $L = l_0 + l_1 + l_2 + \ldots + l_7$. Donner l'arrondi à 10^{-1}de L.
(b) Sachant que le paysagiste doit planter un arbuste tous les cinquante centimètres à partir de A_0, en déduire le nombre d'arbustes à planter.

EXERCICE N°20

Ali et Samir comparent leurs salaires. Elles débutent chacune avec un salaire de 1 500 dinars
Chaque mois, à partir du deuxième mois :
**)Le salaire d'Ali augmente de 8 dinars*
**)Le salaire de Samir augmente de 0,2% et on y ajoute 4 dinarsPour tout entier naturel n, on désigne par a_n le salaire mensuel en dianrs*
que perçoit Alice à la fin du (n+1)-ième mois, et par c_n celui perçu par Carole.
Ainsi : $a_0 = c_0 =1500$; a_1 et c_1 représentent les salaires perçus à la fin du deuxième mois.
1°) Calculer a_1 et c_1, a_2 et c_2.
2°) a) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de a_n en fonction de n.
3°) a) Justifier que, pour tout entier naturel n :
$c_{n+1} = 1,002c_n + 4$.
b) On considère la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n + 2000$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002.
Calculer v_0 et, pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que : $c_n = 3500 - 1,002^n - 2000$.
4°) Calculer, puis comparer les salaires annuels d' Ali et Samir ont perçus au cours de leur première année de travail.