EXERCICE N°1

Etablir que :

1°) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2°) $x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

3°) $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x + y - \sqrt{2|xy|})(x + y + \sqrt{2|xy|})$

EXERCICE N°2

1°) *Vérifier chacune des égalités suivantes*

(a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{10}$;

(b) $\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$;

(c) $12^3 = (9+\sqrt{5})^3 + (9-\sqrt{5})^3$

2°) *Ecrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur.*

$A = \dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $B = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $C = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$

EXERCICE N°3

Soient a , b et c trois réels non nuls tels que : $abc = 1$ *et* $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

1°) *Montrer que :* $a + b + c = ab + bc + ac$.

2°) *En déduire que l'un au mois des trois réels a , b , c est égal à 1 .*

EXERCICE N°4

Soit x un réel strictement positif .

1°) *Soient* $A = (1 + x)^2$ *et* $B = 1 + 2x$

(a) *Comparer A et B .*

(b) *Lequel est plus grand :* $a = (1{,}00000000000003)^2$ *ou* $b = 1{,}00000000000006$

2°) *Soient* $C = \dfrac{1}{1+x}$ *et* $D = 1 - x$

(a) *Comparer C et D.*

(b) *Comparer :* $c = \dfrac{1}{1{,}000000001}$ *et* $d = 0{,}999999999$.

3°) *Soit* $0 < x < 1$ *et soient* $E = \dfrac{1+x}{1-x}$ *et* $F = 1 + 2x$.

(a) *Calculer E – F et comparer E et F.*

(b) *Comparer* $e = \dfrac{1{,}000000001}{0{,}999999999}$ *et* $f = 1{,}000000002$

EXERCICE N°5

1°) *Soit n un entier naturel non nul . Montrer que :* $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2°) *Simplifier alors l'expression :* $E = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{2006\times 2007}$.

EXERCICE N°6

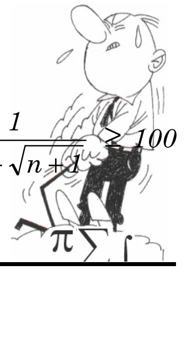
1°) *Soit n un entier naturel non nul . Montrer que :* $1 - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n+1}{n}$.

2°) *Simplifier alors l'expression :* $F = (1-\dfrac{1}{2^2})\times(1-\dfrac{1}{3^2})(1-\dfrac{1}{4^2})\times\ldots\ldots\times(1-\dfrac{1}{1000^2})$

EXERCICE N°7

1°) *Soit n un entier naturel . Montrer que :* $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2°) *Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :* $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$



EXERCICE N°8

Le but de l'exercice est de trouver tous les nombres entiers naturels a , b et c

tel que $a < b < c$ *et* $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

1°)Vérifier que $a \geq 2$.

2°)Etablire l'inégalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a}$. *En déduire les valeurs possibles pour a .*

3°)Montrer que : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{2}{b}$. *En déduire les valeurs possibles pour b .*

4°)Conclure.

EXERCICE N°9

A°)*Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que* $a \leq b$.

On appelle « moyenne arithmétique de a et b » le nombre réel $m(a,b) = \frac{a+b}{2}$. *Le nombre réel* $g(a,b) = \sqrt{a.b}$ *est appelé « moyenne géométrique de a et b » et le nombre réel* $h(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$ *est appelé « moyenne harmonique de a et b » et le nombre réel*

$q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ *est appelé « moyenne quadratique de a et b »*

1°)Calculer m(2,4) , g(2,4) , h(2,4) et q(2,4) .

2°)Montrer que : $a \leq h(a,b) \leq g(a,b) \leq m(a,b) \leq q(a,b) \leq b$.

3°)Montrer que : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

4°)En déduire que , pour tout réel a , b et c on a :

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}\,(a+b+c)$

5°)Montrer que , pour tout réel a , b et c on a : $a^2 + b^2 + c^2 \geq a.b + a.c + b.c$

6°)En déduire que , pour tout réel a , b et c on a : $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$

B°)*Soient x , y , z sont les longueurs des cotes d'un triangle .*

1°)Montrer que :

$x \geq \sqrt{x+y-z}\,.\sqrt{x-y+z}$; $y \geq \sqrt{y+x-z}\,.\sqrt{y+z-x}$ *et* $z \geq \sqrt{y+z-x}\,.\sqrt{x+z-y}$

2°)Montrer alors que : $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

3°)En déduire que : $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

EXERCICE N°10

Soit $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots\dots + |x-99| + |x-100|$. *Montrer que f(x) est constant pour* $x \in [50,51]$.

EXERCICE N°1

Soit a et b des réels strictement positifs distincts. Montrer que l'inégalités suivantes :

(a) $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; (b) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

(c) $\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; (d) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

EXERCICE N°11

1°)Montrer que , pour tout x de R : $x^2 + 1 \geq 2.x$

2°)En déduire que , pour tout a , b et c de R : $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8.a.b.c$

EXERCICE N°12

Soient a , b ,c les longueurs de cotes d'un triangle.

Montrer que : $3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$

EXERCICE N°13

Soient a er b deux réels tels que : $0 < a \leq b$.

Montrer que : $\frac{1}{8}.\frac{(b-a)^2}{b} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{a.b} \leq \frac{1}{8}.\frac{(b-a)^2}{a}$

EXERCICE N°14

Traduisez à l'aide d'une valeur absolue chacune des affirmations :

1°)1,63 est une valeur approchée de x à la précision 10^{-2} *près .*

2°)-0,35 est une valeur approchée de x à la précision 2.10^{-2} *près.*

3°)0,55 est une valeur approchée de x, par défaut à la précision 10^{-2} *près.*

4°)3,15 est une valeur approchée de x, par excès à la précision 10^{-2} *près.*

EXERCICE N°15

Ptolémée, mathématicien grec, utilisait comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ *le nombre*

$$a = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3} .$$

En utilisant la calculatrice, dire si est une valeur approchée par excès ou par défaut et déterminer la précision h de cette approximation.

EXERCICE N°16

Encadrer l'aire d'un rectangle dont les dimensions des cotés , à la précision d'un millimètre, sont 10 cm et 5 cm .

EXERCICE N°17

1°)Montrer que , pour tout x réel positif , on a : $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$

2°)Utiliser cette double inégalité pour obtenir des valeurs approchées de $\dfrac{1}{1{,}02}$