EXERCICE N°1

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ *et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unités 2 cm.*

1°)Trouver deux nombre a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b\,e^x}{e^x+1}$,

en déduire une primitive F de f.

2°)Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

3°)En déduire la valeur en cm² de l'aire comprise entre la courbe (C), les deux axes et la droite d'équation x = 1.

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *par :* $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$

on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale : $I=\int_0^{1/2}\dfrac{e^{-x}}{1-x}dx$

1°) En étudiant les variations de la fonction f, démontrer pour tout nombre réel x de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$: $1\le f(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

2°) a) Démontrer que, pour tout x de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+\dfrac{x^2}{1-x}$.

b) En déduire que : $I=\int_0^{1/2}(1+x)\,e^{-x}\,dx+\int_0^{1/2}x^2\,f(x)\,dx$

c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie : $J=\int_0^{1/2}(1+x)\,e^{-x}\,dx$

d) Déduire de (1) que : $\dfrac{1}{24}\le\int_0^{1/2}x^2\,f(x)\,dx\le\dfrac{1}{12\sqrt{e}}$

e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01.

EXERCICE N°3

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k *définie sur* $[0\,;+\infty[$ *par :* $f_k(x)=\ln(e^x+kx)-x$
Soit (C_k) *la courbe représentative de la fonction* f_k *dans le plan muni d'un repère orthogonal* $(O;\vec{i};\vec{j})$, *(unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).*

Partie A

1°)Etudier le sens de variation de la fonction f_1.

2°) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f_1(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$.

En déduire la limite de f_1 *en* $+\infty$.

3°)Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B

1°) Calculer $f_k'(x)$ *pour tout x appartenant à l'intervalle* $[0\,;+\infty[$ *et en déduire le sens de variation de la fonction* f_k.

2°) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f_k(x)=\ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right)$

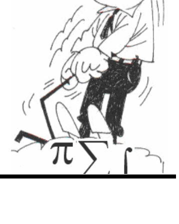
En déduire la limite de f_k *en* $+\infty$.

3°) Dresser le tableau de variation de f_k.

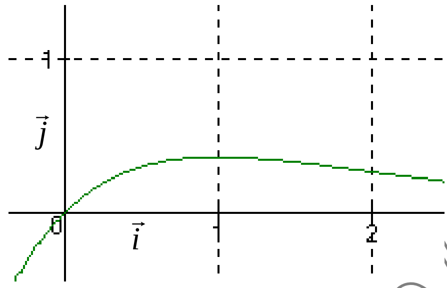
4°) Déterminer une équation de la tangente (T_k) *à* (C_k) *au point O.*

5°) Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p<m$. *Etudier la position relative de* (C_p) *et* (C_m).

6°) Tracer les courbes (C_1) *et* (C_2) *ainsi que leurs tangentes respectives* (T_1) *et* (T_2) *en O.*



EXERCICE N°4



Soit la fonction définie sur R par : $f(x) = x\,e^{-x}$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, où $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est le repère du plan P, on considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par les axes $(O\,;\vec{i})$ et $(O\,;\vec{j})$, la droite d'équation $x = 2$ et la courbe (C_f).

EXERCICE N°5

Partie A

On considère la fonction e f de la variable réel x définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
2°) Pour x élément de $]0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$.
3°) Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
4°) Tracer la courbe (C) (unité graphique : 2 cm).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1°) Interpréter géométriquement u_n.
2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
3°) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4°) Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
b) En déduire le sens de variation de F.
2°) a) Démontrer que, pour tout réel t positif, $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.
b) En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $F(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$.
c) À l'aide d'un intégration par parties, montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4-(x+3)e^{1-x}$
d) En déduire que, pour tout x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.
3°) On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des n – 1 premiers termes de la suite (u_n).
Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

EXERCICE N°6

On appelle f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
1°) Etudier le sens de variation de la dérivée f'.
Démontrer que pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$.
2°) a)Calculer la limite de f en $+\infty$.
b)Dresser le tableau de variation de f.
3°) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de D et (C).
b) Montrer que la courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite D.

Déterminer les coordonnées de A.
4°) Démontrer que l'équation f(x) = 2 admet sur [0 ; +∞[une unique solution notée α.Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
5°) a) Construire la droite D, la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).
b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

EXERCICE N°7

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[par : $f_n(x) = \dfrac{1+n\ln x}{x^2}$.

Partie A

***I.** -1°)Calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.*
2°)Résoudre l'équation $f'_n(x)=0$. Étudier le signe de f'_n.
3°)Déterminer la limite de f_n en +∞.
4°)Établir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.
II. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 5 cm).
On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.
1. *Tracer (C_2) et (C_3)*
2. *a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?*

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3). Tracer (C_4).

Partie B

1°) Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

2°)En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

3°)On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations y = 0, x = 1 et x = e.

a) Calculer A_2.

b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

Partie C

Dans toute la suite, on prendra $n \geq 3$.

1°) a) Vérifier que, pour tout n, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.

b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1 ; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

2°)Montrer que l'équation $f_n(x) =1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}} ;+\infty\right[$ exactement une solution notée α_n .

3°)On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).
a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$.
b) En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).

EXERCICE N°8

On considère la suite (U_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1°)Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur [0 , 1].

En déduire la valeur de U_1 .

2°)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,$U_{n+1} = (n + 1)\ U_n - 1$

3°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

4°)a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :

$(1-t)^n\ e^t \leq e \times (1-t)^n$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

5°)Déterminer la limite de la suite (U_n)

EXERCICE N°9

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.
1°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ;+\infty[$,on a :$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.
En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation y = x .
d) Etudier la position relative de (C) et (Δ).
2°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3°) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt$

1°) Soit n un entier naturel. Donner une interprétation géométrique de F(n).
2°)Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3°) Démontrer que pour tout réel a strictement positif on a : $\dfrac{a}{a+1} \leq \ln(1 + a) \leq a$.

4°)Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 3° $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

5°)On admet que la limite de F(x) , lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I.

Etablir que : $\dfrac{1}{2}\ln 2 \leq I \leq \dfrac{1}{2}$.

6°)Pour tout entier naturel n, on pose :. $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\ln(1 + e^{-2(n+1)}) \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$
b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
c) Déterminer la limite de la suite (U_n).
7°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.
a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.
b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

EXERCICE N°10

Partie A :

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O ;\vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes que l'on précisera.

2°) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par :$g(t) = \dfrac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$.

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle$[0 ; +\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3°) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4°) Tracer les asymptotes à la courbe (C) et la courbe (C).

Partie B :

Soit F la fonction définie sur R par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1°) Etudier le sens de variation de la fonction F.

2°) a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante : $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C :

Soit (u_n) la suite définie sur N* par : $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^k)$.

1°) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_4.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3°) a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$, on a : $f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

b) Comparer u_n et $F(n)$.

4°) La suite (u_n) est-elle convergente ?

EXERCICE N°11

Partie A

1°)Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur R par $g(t) = e^t - t - 1$. Quel est le minimum de la fonction g sur R ?
2°)En déduire les inégalités suivantes
a)Pour tout réel t, $e^t \ge t + 1$, $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$.
b)Pour tout réel tel que $t > -1$, $\ln(1 + t) \le t$.
3°)En déduire que pour tout réel x, $\ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x}$

Partie B

1°)Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$.

a)Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.
b)Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.
c)Déterminer la limite de la suite (u_n).

2°)Soit n un entier naturel, on pose $I_n = -2\int_0^n \ln(1 - xe^{-x})dx$.

a)Montrer en utilisant la question 3. des préliminaires que $I_n \ge 2\, u_n$
b)On admet que la suite (I_n) a pour limite l. Montrer que $l \ge 2$.

EXERCICE N°12

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur]0 ; + ∞ [par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1°)Étudier le sens de variation de g.

2°)En déduire le signe de g(x) sur]0 ; + ∞ [.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$*.(unité graphique 2 cm).*

1°)Déterminer la limite de f en 0.

Interpréter graphiquement le résultat.

2°)a) Déterminer la limite de f en + ∞.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ *est asymptote à la courbe (C).*

c) Déterminer la position de (C) par rapport à (D) sur]0 ; + ∞[.
Montrer, en particulier, que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3°)Dresser le tableau de variation de f.
4°)Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ).Préciser les coordonnées de B.
5°)Montrer que l'équation f(x) = 0 a une solution unique α *.Justifier l'encadrement :* $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$.
6°)Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) *définie par* $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ *pour tout nombre entier naturel n.*

1°) a) Montrer que (x_n) *est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.*

b)Montrer que (x_n) *est une suite croissante.*

2°) Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right)dx$.

a)Donner une interprétation géométrique de a_n.

b)Montrer que $a_n = \dfrac{2n+1}{2}$ *pour tout nombre entier naturel n.*

En déduire que (a_n) *est une suite arithmétique.*