Fiche de cours $4^{ème}$ *inf*
DERIVAB ET PRIMITIVES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

DERIVABILITES

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ *ou encore*

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$

Le réel ℓ *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il noté* $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une tangente T d'équation :* $y = f'(a)\ (x-a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a)\end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$ *. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+a^2+ax)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+a^2+ax)=3a^2$$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a)=3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :]a-h , a] (h >0)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell'$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$

Le réel ℓ' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il noté* $f'_g(a)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : [a , h+a[(h>0)

On dit que f est dérivable à droite en x_0 *s'il existe un nombre réel* ℓ'' *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell''$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell''$

Le réel ℓ'' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il noté* $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a)=f'_d(a)$ *nombre fini*

2°)Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_d *d'équation :* $T_d : y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x \ge a$

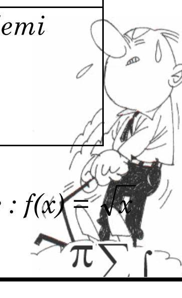
3°)Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_g *d'équation :* $T_g : y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x \le a$

Interprétation graphiques : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ *ou encore* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$

Si :	***Interprétation graphique*** *:*
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation :* $x = a$ *et* $y \ge f(a)$
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	*alors* C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation :* $x = a$ *et* $y \le f(a)$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse $x = 0$ *et interpréter la résultat tel que :* $f(x) = \sqrt{x}$



$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ *alors la courbe alors* C_f *admet en point* $M(0,0)$ *un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation :* $x = 0$ *et* $y \geq 0$

Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les propriétés suivantes :
(*) la fonction f est une bijection de I sur f(I)
(*)La fonction f^{-1} *est une bijection de f(I) sur I et on a :* $(x\in I\ ,\ y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(I)\ ,\ x = f^{-1}(y))$
(*)La fonction f^{-1} *est strictement monotone sur f(I) et a la même sens de variations que f .*
(*) Les courbes représentatives de f et f^{-1} *, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (y = x)*
**)Si est du plus f est continue sur I alors* f^{-1} *est continue sur f(I)*
**)Si est du plus f est dérivable sur I et* $f'(x) \neq 0$ *pour tout x de I alors :* $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ *pour tout x de f(I)*

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et dérivable sur]a,b[.
Alors il existe au moins un élément x_0 *de]a,b[tel que :* $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Sens de variation

Soit f une fonction continue sur [a,b] et dérivable sue]a,b[
Si $f'(x) \geq 0$ *sur]a,b[alors f est croissante sur [a,b]*
Si $f'(x) > 0$ *sur]a,b[alors f est strictement croissante sur [a,b]*
Si $f'(x) \leq 0$ *sur]a,b[alors f est décroissante sur [a,b]*
Si $f'(x) < 0$ *sur]a,b[alors f est strictement décroissante sur [a,b]*
Si $f'(x) = 0$ *sur]a,b[alors f est constante sur [a,b]*

Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et dérivable sur]a,b[.
Si : existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ *pour tout x de]a,b[*
On a alors : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$
Si pour tout x de]a,b[: $|f'(x)| \leq k$ *alors* $|f(b)-f(x)| \leq k|b-a|$

Extremum

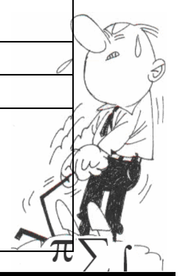
**)Si f admet un extremum local en* x_0 *alors* $f'(x_0) = 0$
**)Si* f' *s'annule en* x_0 *en changeant de signe alors f admet un extremum local en* x_0 *.*

Point d'inflexion

Soit x_0 *un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant* x_0*.*
Si f'' s'annule en x_0 *, en changeant de signe , alors le point* $I(x_0\ ,\ f(x_0))$ *est un point d'inflexion.*

Tableau de dérivé :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$F(x) = k$ (constante)	$F'(x) = 0$	R
$F(x) = x$	$F'(x) = 1$	R
$F(x) = ax+b$	$F'(x) = a$	R
$F(x) = x^n$ ($n \in Z^*$)	$F'(x) = nx^{n-1}$	R si $n>0$; R^* si $n<0$
$F(x) = \sqrt{x}$	$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^*_+
$F(x) = \frac{1}{x}$	$F'(x) = -\frac{1}{x^2}$	R^*
$F(x) = \cos(x)$	$F'(x) = -\sin(x)$	R
$F(x) = \sin(x)$	$F'(x) = \cos(x)$	R
$F(x) = \tan(x)$	$F'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$R-\left\{k\frac{\pi}{2} ; k\in Z\right\}$
$F(x) = \cos(ax+b)$	$F'(x) = -a\sin(ax+b)$	R
$F(x) = \sin(ax+b)$	$F'(x) = a\cos(ax+b)$	R
$F(x) = \tan(ax+b)$	$F'(x) = a(1 + \tan^2(ax+b))$	$R-\left\{k\frac{\frac{\pi}{2}-b}{a} ; k\in Z\right\}$



Opérations sur les dérives

Lorsque u et v sont des fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
$k.u$ (k =constante)	$k.u'$	
$u.v$	$u'.v + u.v'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n ($n \in Z^*$)	$n.u'.u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$	

PRIMITIVES

On note par , I : un intervalle de R et f une fonction définie sur I

Définition :

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que : pour tout x de I on a :
$F'(x) = f(x)$

Théorème 1

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I et si F est l'une d'entres elles, toute autre primitive G de f sur I est définie par : G(x) = F(x) + constante

Théorème 3

Soit f une fonction continue sur I. x_0 est un réel donné de I et y_0 est un réel donné.
Alors il existe un primitive G de f sur I et une seule telle que $G(x_0) = y_0$

Théorème 4

F et G sont des primitives respectives de f et g sur I, alors :aF+ bG est une primitive de af + bg sur I

Primitives des fonctions usuelles

F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et a , ω, φ des réels avec $\omega \neq 0$

f	I	F
$x \mapsto a$	R	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n, n \in N^*$	R	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}, n \in N^* - \{1\}$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	R	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	R	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	R	$x \mapsto -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	R	$x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \tan x + c$

Calcul de primitives

F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v deux fonctions dérivable sur I.

f	condition	F
$u'u^n, n \in N^*$		$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v + v'u$		$u.v$
$\dfrac{u'}{u^n}, n \in N^* - \{1\}$	$\forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$	$\dfrac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\forall x \in I, \quad v(x) \neq 0$	$\dfrac{u}{v}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\forall x \in I, \quad u(x) > 0$	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	$\forall x \in I, \quad u(x) \geq 0$	$\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'(w' \circ u)$	w est dérivable sur $u(I)$	$w \circ u$