Eléments de Logique : Application:

On appelle propriété ou assertion, un énoncé qui est soit vrai, soit faux et non les deux à la fois.

La négation d'une assertion p est l'assertion notée non p, définie par la table de vérité ci-contre :

P	non P
v	f
f	v

Exemple

(P) : 2008 est un nombre pair est une proposition vraie
(non P) : 2008 est un nombre impair est une proposition faux

Les connecteurs logiques :

et	ou	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
conjonction	disjonction	implication	équivalence

sont définis par :

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	f	v	v	f
f	f	f	f	v	v

Principe de contre-opposition

Soient P et Q deux proposition.
Pour démontrer que P implique Q , il suffit de démontrer que (non Q) implique (non P) .

Exemple

Soit n un entier naturel.
Montrer que : si n^3 est impair alors n est impair

Correction

On a :
P : "n^3 est un entier impair", alors (non P) : "n^3 est un entier pair".
Q :"n est un entier impair" , alors (non q) : "n est un entier pair".
Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ il suffit de démontrer que $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$
On suppose que n est un entier pair alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que n=2k
Alors $n^3=(2k)(2k)(2k) = 8k^3 = 2p$ avec $p = 4k^3$ alors n^3 est un entier pair.
Conclusion : si n^3 est impair alors n est impair

Raisonnement par l'absurde

Principe de raisonnement par l'absurde :

Soient P et Q deux proposition.
Pour démontrer que P implique Q. On suppose que P est vraie et Q est fausse, et on montre que cela entraîne une contradiction.

Exemple

Soit x un entiers. Démontrer que : x est pair équivaut à x^2 est pair.

Correction :

Sens direct : Si x est pair alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$ alors $x^2 = 4k$ alors x^2 est pair.
Sens réciproque : Raisonnement par l'absurde
P:"x^2 est un nombre pair"
Q :"x est un nombre pair"
alors pour montrer que P implique Q il suffit de supposer que P est vraie et Q est fausse et on montre que cela entraîne une contradiction.

(non Q) : "x est un nombre impair".
On suppose que x^2 est pair et x est impair alors il el existe $k \in Z$ tel que
$x = 2k+1$
alors $x^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ alors x^2 est impair , ce qui est contradictoire avec le fait que x^2 est pair.
Conclusion : x est pair équivaut à x^2 est pair