SEMAINE DES SUITES REELLES

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

Exercice n°01

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n *définie sur R par* $f_n(x)=x^3+nx-1$

1. *Montrer que l'équation* $f_n(x)=0$ *admet dans l'intervalle* $]0,1]$ *une solution unique* U_n
2. *Calculer* U_0 *et Vérifier que pour tout n de N :* $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x$.
3. *En déduire que la suite* (U_n) *est décroissante puis qu'elle est convergente.*
4. *Vérifier que pour tout n de N* :* $\frac{U_1}{n}\leq U_n\leq\frac{1}{n}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}nU_n$
5. *Montrer que pour tout n de N :* $\frac{n}{n+1}\leq\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{n+3}{n+4}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$
6. *Soit pour tout n de N* :* $S_n=\frac{1}{n}(U_1+U_2+...+U_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k$.
   a. *Montrer que* (S_n) *est décroissante.*
   b. *Montrer que pour tout n de N* :* $S_{2n}\leq\frac{S_n+U_n}{2}$
   c. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

Correction d'exercice n°01

1. *On a* f_n *est continue, strictement croissante sur* $[0,1]$ *et* $f_n(0)\times f_n(1)=-1\times n\leq 0$

alors d'âpre théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution U_n

de l'équation $f_n(x)=0$ *tel que* $U_n\in\,]0,1]^{\langle *\rangle}$

$\langle * \rangle$ *car* $f_n(0)<0$ *et* $f_n(1)\geq 0$

2. *On a* $f_0(U_0)=0\Leftrightarrow U_0^3-1=0\Leftrightarrow U_0=1$.

Pour tout n de N : $f_{n+1}(x)=x^3+(n+1)x-1=x^3+nx-1+x=f_n(x)+x$

3. *-On a Pour tout n de N :* $f_{n+1}(U_n)=f_n(U_n)+U_n=0+U_n>0=f_{n+1}(U_{n+1})$

Or f_n *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *et pour tout n de N :* $U_n\in[0,1]$ *alors* $U_n\geq U_{n+1}$

-On a U est décroissante et minoré par 0 *alors U est convergente.*

4. *On a* $0<\frac{U_1}{n}\leq 1$ *et* f_n *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *alors* $f_n\left(\frac{U_1}{n}\right)<f_n(0)=-1\leq 0$

D'autre part $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}>0$

$Conclusion : f_n\left(\frac{U_1}{n}\right)\times f_n\left(\frac{1}{n}\right)\leq 0 \text{ et } \left[\frac{U_1}{n},\frac{1}{n}\right]\subset]0,1] \text{ alors pour tout } n \text{ de } N^* : \frac{U_1}{n}\leq U_n\leq\frac{1}{n}.$

$On\ a\ \lim_{n\to+\infty}\frac{U_1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty}U_n=0$

$On\ a\ f_n(U_n)=0=U_n^3+nU_n-1 \text{ alors } 1-U_n^3=nU_n \text{ or } \lim_{n\to+\infty}U_n=0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty}1-U_n^3=1$

$Donc\ \lim_{n\to+\infty}nU_n=1$

5. $On\ a\ 1-U_n^3=nU_n \text{ et } 1-U_{n+1}^3=(n+1)U_n \text{ alors } (n+1)U_{n+1}-nU_n=U_n^3-U_{n+1}^3$

$Or\ (U_n) \text{ est décroissante alors } (n+1)U_n-nU_n\geq 0 \text{ donc } \frac{n}{n+1}\leq\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$On\ a\ 3U_n+1-U_n^3=3U_n+nU_n=(n+3)U_n \text{ et } 3U_{n+1}+1-U_{n+1}^3=3U_{n+1}+(n+1)U_n=(n+4)U_{n+1}$

$Alors\ (n+4)U_{n+1}-(n+3)U_n=U_n^3-U_{n+1}^3+3(U_{n+1}-U_n)=(U_n-U_{n+1})(U_n^2+U_{n+1}^2+U_nU_{n+1}-3)$

$Or\ 0<U_n\leq 1 \text{ alors } (U_n^2+U_{n+1}^2+U_nU_{n+1}-3)\leq 1^2+1^2+1\times 1-3=0$

$Comme\ (U_n) \text{ est décroissante alors } (n+4)U_{n+1}-(n+3)U_n\leq 0 \text{ donc } \frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{n+3}{n+4}.$

$Conclusion : \text{pour tout } n \text{ de } N : \frac{n}{n+1}\leq\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{n+3}{n+4}.$

$On\ a\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+4}=1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$

6.

a- $On\ a\ S_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\underbrace{U_1+U_2+\ldots+U_n}_{nS_n}+U_{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}S_n+\frac{U_{n+1}}{n+1}$

$Alors\ S_{n+1}-S_n=\frac{U_{n+1}-S_n}{n+1}$

$$Or \begin{cases} U_1 \geq U_{n+1} \\ U_2 \geq U_{n+1} \\ \vdots \\ U_n \geq U_{n+1} \end{cases} \quad alors \ \sum_{k=1}^{n} U_k \geq nU_{n+1} \ \ donc \ \ S_n \geq U_{n+1} \ ainsi \ S_{n+1} \leq S_n$$

b- On a : $S_{2n} = \frac{1}{2n}\left(\underbrace{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}_{nS_n} + U_{n+1} + \ldots + U_{2n}\right) = \frac{S_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} U_k$

Or $n+1 \leq k \leq 2n$ et U est décroissante alors $U_{2n} \leq U_k \leq U_{n+1}$ donc $\sum_{k=n+1}^{2n} U_k \leq \sum_{k=n+1}^{2n} U_{n+1}$

alors $\sum_{k=n+1}^{2n} U_k \leq nU_{n+1} \leq nU_n$ d'où $S_{2n} \leq \frac{S_n}{2} + \frac{nU_{n+1}}{2n} = \frac{S_n + U_n}{2}$

c- On a S est décroissante et minoré par 0 alors S est convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

On a S est convergente alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$

On a $0 \leq S_{2n} \leq \frac{S_n + U_n}{2}$ par passage à limite $0 \leq \ell \leq \frac{\ell + 0}{2}$ alors $0 \leq \ell \leq 0$ donc $\ell = 0$

Pour aller plus loin

1. Montrer que pour tout entier n supérieur strictement à 1 : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{n+1}{n+2}$.

2. Soit pour tout n de N^* : $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{kU_k}{1-U_k}$

Etablie que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 1$.