DEVOIR DE CONTROLE N°2

3ème année Maths

Proposer par : Mr AKIR ALI Durée : 2 heure

☞QCM (2.25pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

I. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6\sqrt{x} + 4}{(x-1)^2}$

① $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

a $\dfrac{8}{5}$ b $\dfrac{7}{4}$ c $\dfrac{21}{13}$ d $+\infty$

② $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - \lim\limits_{x \to 1} f(x)}{x} =$

a $-\dfrac{9}{23}$ b $\dfrac{9}{23}$ c $-\dfrac{3}{8}$ d $+\infty$

II. L'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ admet :

a : une unique solution dans R

b : deux solutions exactement dans R

c : n'admet aucune solution dans R

☞Exercice 1 (4.5pts)

On dispose de cinq casiers numérotés : 1 , 2 , 3 , 4 et 5 et de trois boules portant les lettres a , b et c .

On range les trois boules dans les cinq casiers. Chaque boule va dans un casier et chaque casier peut contenir aucune boule, une boule ,ou plusieurs boules.

①Combien y a-t-il de rangements possibles?

②Combien y a-t-il de rangements pour lesquels chaque casier contient au plus une boule?.

③Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 contient 2 boules et le casier n°2 une ?

④Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 ne contient aucune boules ?

⑤Dans cette question on suppose que chaque casier ne peut contenir plus d'une boule.

a) Combien y a-t-il de rangements possibles?
b) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 est vide?

☞Exercice 2 (8.25pts)

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Soit (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I.

①Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de chacun extrema.

②Montrer que l'équation : f(x) = 0 admet trois solutions a , b et c tel que $-2 < a < -1 < b < 1 < c < 2$

③Montrer que pour tout $x \in \{a,b,c\}$: $f'(x) \neq 0$

④Montrer que pour tout x de R : $f'(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$

⑤Montrer que : $\frac{a}{f'(a)} + \frac{b}{f'(b)} + \frac{c}{f'(c)} = 0$

⑥Montrer que pour tout $x \in R - \{a,b,c\}$ on a : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$

⑦En déduire que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = -3$ et $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right)^2 - \frac{f''(0)}{f(0)} = 9$

⑧Calculer la valeur de : $\frac{1}{(a^3-1)^2} + \frac{1}{(b^3-1)^2} + \frac{1}{(c^3-1)^2}$

II.

①Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de courbe (ζf) avec la droite $D_m : y = mx - m - 3$ ($m \in R$)

②Lorsque D_m coupe (ζf) en deux points distincts M' et M'' autre que le point A(1,-3), on appelle I le milieu de [M'M'']. Quel est l'ensemble des points I lorsque m varie .

③Soit M un point (ζf)d'abscisse $x \in]0,1[$. H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe $(O,\vec{i})$ et l'axe $(O,\vec{j})$.

Déterminer la valeur de x pour que la périmètre du rectangle OHMK soit maximal.

☞Exercice 3 (5pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle est isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $I = B * C$; Δ la droite passant par C et perpendiculaire à (BC) et $K = \Delta \cap (AB)$.

①Faire une figure .

②Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- a- Déterminer $r(B)$, $r((AC))$ et $r((BC))$.
- b- Déduire $r(C)$ et $r(I)$

③Soit le cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

- a- Déterminer $\zeta' = r(\zeta)$ puis $\zeta \cap \zeta'$
- b- Soit M un point du plan tel que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ et $M' = r(M)$. Sur que ensemble varie le point M' lorsque M varie ?
- c- Montrer que $(BM) \perp (CM')$ et que $IM = JM'$ avec $J = r(I)$

☞Exercice (Bonus+2pts)

Soit f une fonction définie sur R et de période 1 en on pour tout $x \in [0,1[$: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$. $b, c \in R$. f est-elle dérivable sur R ?