VOCABULAIRE DES PROBABILITES

1)Expérience aléatoire

On lance un dé ou une pièce de monnaie, on tire une carte dans un jeu…
Seul le hasard intervient.
On parle alors d'expérience aléatoire.

2) Eventualité

Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des éventualités.
L'ensemble des éventualités s'appelle l'univers, on le note Ω.

Exemple :
On lance un dé.
Il y a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

3) Evénement

Définition :
Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.

***Evènement particuliers :** Ω*
Ω s'appelle l'événement certain.
$\emptyset$ s'appelle l'événement impossible.
$\{a\}$ s'appelle l'événement élémentaire (il est formé d'une seule éventualité)

Exemple :
On lance un dé.
L'événement certain est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Les 6 évènements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.
L'événement « Obtenir un nombre impair » est $\{1 ; 3 ; 5\}$.
Il est composé de trois éventualités.

Définition :
Soit E et F deux événements de Ω.
On dit que E est inclus dans F, et l'on note $E \subset F$, si toutes les éventualités de E appartiennent aussi à F.

Exemple :
On lance un dé.
Soit A l'événement : « obtenir un chiffre pair »
Soit B l'événement : « obtenir le chiffre 6 »
B est inclus dans A : $B \subset A$.
La réalisation de B entraîne celle de A.

3) Probabilité

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une éventualité tend vers une valeur « idéale » : on l'appelle probabilité de l'événement élémentaire associé à l'éventualité considérée.
C'est un nombre compris entre 0 et 1. On le note $P(\{a\})$, a étant l'éventualité observée.

Exemples :
- *On lance une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir « face » est 0,5.*
- *On lance un dé. La probabilité d'obtenir le nombre 3 est égale à $\frac{1}{6}$. $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$.*

Propriété 1 :
Si $A = \emptyset$ alors $P(A) = 0$.
Si $A \neq \emptyset$, alors la probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$, alors $P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + \ldots + P(\{a_k\})$.

***Exemple :** On lance un dé. Chaque face a la même probabilité d'apparaître : $\frac{1}{6}$.*
Soit A l'événement « obtenir un nombre impair ».
$P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Propriété 2 :
Quel que soit l'événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$ et $P(\Omega) = 1$.

Equiprobabilité

Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables.
Expressions qui signifient qu'il y a équiprobabilité :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On lance une pièce parfaitement équilibrée.
On jette un dé non pipé.
Les jetons ou les boules sont indiscernables au toucher…

Propriété 3 :

Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a pour probabilité $\frac{1}{n}$ *où n est le nombre d'éventualités.*

Si A est événement contenant m éventualités, alors $P(A) = \frac{m}{n}$.

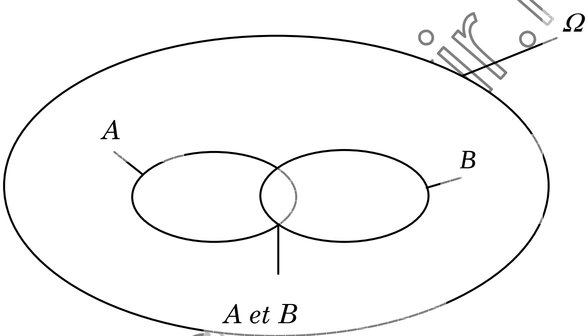
On écrit parfois $P(A) = \dfrac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}}$

Exemple :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Chaque tirage est équiprobable.
La probabilité de tirer le roi de trèfle est $\frac{1}{52}$.
La probabilité de tirer un trèfle est de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

VOCABULAIRE DES EVENEMENTS

1)Evénement « A et B »

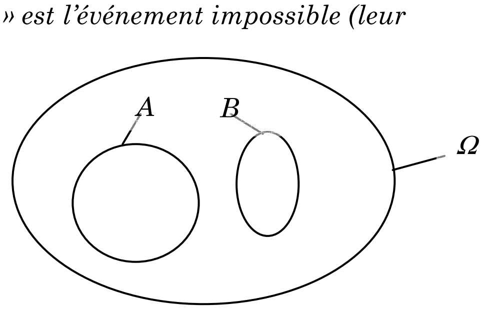
Définition :
On appelle événement « A et B », l'événement constitué des éventualités qui appartiennent à A et à B simultanément.
Remarque :
L'événement « A et B » est l'intersection de deux événements : « A et B » = $A \cap B$.



Définition :

On dit que deux événements sont incompatibles si « A et B » est l'événement impossible (leur intersection est alors l'ensemble vide).

Remarque :
Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$.

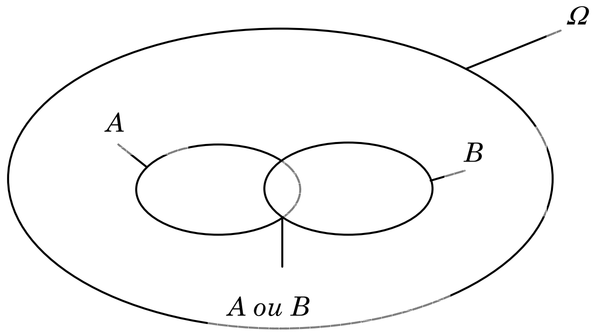


Exemple :
On lance un dé.
Soit A l'événement « obtenir un nombre impair ». $A = \{1 ; 3 ; 5\}$
Soit B l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 ». $B = \{1 ; 2\}$
Soit C l'événement « obtenir un nombre multiple de 3 ». $A = \{3 ; 6\}$
« A et B » est l'événement obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 2 ».
« A et B » = $A \cap B = \{1\}$.
Les événements B et C sont incompatibles. En effet $B \cap C = \emptyset$.

2)Evénement « A ou B »

Définition :

On appelle événement « A ou B », l'événement constitué des éventualités qui appartiennent à A ou à B.
Remarque :
L'événement « A et B » est la réunion de deux événements : « A ou B » = $A \cup B$.



Pour calculer $P(A \cup B)$, on peut calculer séparément P(A) et P(B), puis les ajouter.
Mais les éventualités qui appartiennent simultanément à A et à B sont alors comptabilisés deux fois.
On obtient donc la probabilité cherchée en retranchant $P(A \cap B)$.

Propriété 4:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si A et B sont incompatibles alors, $P(A \cap B) = 0$ on obtient donc :

Propriété 5:

Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple :
On lance un dé non pipé.
Soit A l'événement « obtenir un nombre impair ». A ={1 ; 3 ; 5}.
Soit B l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 ». B ={1 ; 2}.
Soit C l'événement « obtenir un nombre multiple de trois ». C ={3 ; 6}.

$A \cup B$ est l'événement « obtenir un nombre impair ou inférieur ou égal à 2 ».
$A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$
$A \cap B$ est l'événement « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 2 ».
$A \cap B = \{1\}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

B et C sont incompatibles donc :

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

3) Evénements contraires

Définition :
Soit A un événement.

On note $\overline{A}$ l'événement constitué de toutes les éventualités qui n'appartiennent pas à A.

On dit que A et $\overline{A}$ sont des événements contraires.

Remarque :

$A \cap \overline{A} = \emptyset$ *donc* $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

$A \cup \overline{A} = \Omega$ *donc* $P(A \cup \overline{A}) = 1$

Propriété 5 :

Quel que soit l'événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple :
On lance un dé.
Soit B l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 ». B = {1 ; 2}.

$\overline{B}$ est l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 2 ». $\overline{B}$ = {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$.