Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les propriétés suivantes :
(*) la fonction f est une bijection de I sur f(I)
(*)La fonction f^{-1} *est une bijection de f(I) sur I et on a :* $(x\in I\ ,\ y=f(x)) \Leftrightarrow (y\in f(I)\ ,\ x=f^{-1}(y))$
(*)La fonction f^{-1} *est strictement monotone sur f(I) et a la même sens de variations que f .*
(*) Les courbes représentatives de f et f^{-1} *, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (y = x)*
Si est du plus f est continue sur I alors f^{-1} *est continue sur f(I)*
Si est du plus f est dérivable sur I et f'(x) ≠ 0 pour tout x de I alors : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ *pour tout x de f(I)*

Exemple *:Soit* $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $I=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *sur un intervalle J qu'on précisera.*

Correction

Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout x de J .*

On a $\forall x\in I$ *:* $f'(x)=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}<0$ *alors f est strictement décroissante et continue sur I alors f réalise une bijection de I sur J = f(I) =* $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to(-0,5)^+} f(x)\right[= \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

Pour tout $x\in J$ *:* $y=f^{-1}(x)$ *équivaut à* $x=f(y)$ *et* $y\in I$

équivaut à $x=\dfrac{y+1}{2y+1}$ *et* $y\in$ I *équivaut à :* $2xy+x=y+1$ *et* $y\in$ I *équivaut à* $y=\dfrac{1-x}{2x-1}$ *et* $y\in$ I

alors pour tout x de J : $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{2x-1}$

Théorème

La fonction réciproque de la fonction f définie sur R_+ *par :* $f(x)=x^n$ $(n\geq 2)$ *est appelée fonction racine* $n^{ième}$ *.*
Pour toit x de R_+ *, le réel* $f^{-1}(x)$ *est noté* $\sqrt[n]{x}$ *.(lire racine* $n^{ième}$ *de x)*

$f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

(*) f^{-1} *est définie , continue et strictement croissante sur* R_+ *. elle est bijective de* R_+ *sur* R_+

(*)Pour tout réel x de R_+ *, on a :* $\sqrt[n]{x^n}=x$ *et* $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

(*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

(*) $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ *est dérivable sur* R_+ *est sa fonction dérivée est :* $x\mapsto\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$

Exemple : *Soit* $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$

1°)Montrer que f est continue sur l'intervalle $I=[2,+\infty[$

2°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3°)Montrer que est strictement croissante sur I .

Correction :

1°)La fonction : g : $x\mapsto x-2$ *est continue et positif sur I*

La fonction : $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ *est continue sur* $R_+\supset g(I)$

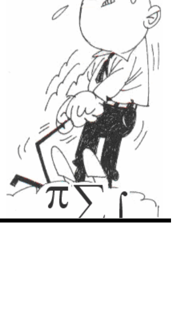
Alors la fonction f est continue sur I car f est comme composée de fonction continues.

2°)on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ *et on a :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$ *donc d'apres le théoreme sur la limite d'une fonction composée on a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3°)Soit a et b deux élément de I tel que $a<b$ *.*

On a : $a<b \Rightarrow a-2<b-2 \Rightarrow \sqrt[3]{a-2}<\sqrt[3]{b-2} \Rightarrow f(a)<f(b)$

Alors est strictement croissante sur I .



Résolution d'équation : $x^n = a$

Soit a un réel et n un entier supérieur ou égale à 2 .

Si n est impair et $a \geq 0$, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution : $\sqrt[n]{a}$

Si n est impair et $a < 0$, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution : $-\sqrt[n]{-a}$

Si n est pair et $a \geq 0$, l'équation $x^n = a$ admet comme solutions : $-\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[n]{a}$

Si n est pair et $a<0$, l'équation $x^n = a$ n'admet aucune solution .

Théorème

Pour x et y $\in \mathbb{R}_+$, n et p deux entiers vérifiant : $n \geq 2$ et $p \geq 2$ on a :

$\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$; $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$; $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$; $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $(y>0)$

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$

Et on a , $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}\right)}$ *pour tout x de I tel que $u(x) > 0$*