

Mesure algébrique d'un vecteur.

Soit Δ une droite munie d'un repère (O, I) , soit A et B deux points de Δ , on appelle mesure algébrique du vecteur \overrightarrow{AB} et l'on note \overline{AB} la différence $x_B - x_A$ des abscisses x_B de B et x_A de A dans le repère (O, I) ; on a donc : $\overline{AB} = x_B - x_A$ et, en particulier $\overline{AA} = 0$.

Exemple : On a $x_A = 2$ et $x_B = -2$ alors $\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 2 = -4$

**Remarques**

1) On a, pour tout point M de Δ , $\overline{OM} = x_M - x_O = x_M$. En particulier $\overline{AB} = x_B - x_A = \overline{OB} - \overline{OA}$

2) On a : $|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = AB$

3) Relation de Chasles : Pour tout points A, B, C d'une droite Δ munie d'un repère (O, I) , on a l'égalité : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Barycentre de 2 point pondérés

Soit (A, α) et (B, β) un système de 2 points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$

On appelle Barycentre de (A, α) et (B, β) l'unique point G défini par $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Remarque : Cette dernière égalité équivaut à $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$, ce qui implique que :

• Le barycentre de deux points est inchangé lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels.

• Le barycentre de 2 points A et B appartient à (AB) . Il est sur le segment $[AB]$ lorsque α et β sont de même signe, au milieu si $\alpha = \beta$, et le plus proche du point ayant le coefficient le plus grand en valeur

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ est un système de 2 points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$. Alors pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}$$

$$\text{Pour : } M=A \text{ on a : } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Pour : } M=B \text{ on a : } \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$$

Propriété :

Si le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , et si on note $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, et $G(x_G, y_G)$, alors

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Construction d'un barycentre

$$G = \text{Bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\} \text{ signifie } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \text{ alors } \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Tracer Δ une sécante à (AB) passant par A et placer les points E et F de Δ tel que $\overline{AE} = b$ et $\overline{AF} = a + b$ d'où

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \text{ d'après Thalès : } (GE) // (BF)$$

Barycentre de trois points pondérés

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ un système de 3 points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

On appelle Barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ l'unique point G défini par $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Propriété : Pour tout point M du plan, on a : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$, ou

$$\text{encore } \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MC}.$$



Propriété (dite du « barycentre partiel ») : Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ un système de 3 points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Si $\beta + \gamma \neq 0$, et si on note H le barycentre du système $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$, alors le barycentre G du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ est aussi barycentre du système $\{(A, \alpha), (H, \beta + \gamma)\}$

Autrement dit, dans l'écriture d'un système de points pondérés, on peut remplacer un certain nombre de points par leur barycentre « partiel », affecté de la somme de leurs coefficients.

Isobarycentre :

L'isobarycentre des points A, B et C est le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ (ou plus généralement A, B et C affectés du même coefficient).

Exemples :

L'isobarycentre de deux points est le milieu du segment formé par ces deux points, l'isobarycentre des sommets d'un triangle est le centre de gravité du triangle.

<http://maths-akir.nidiblogs.com/>

