EXERCICE N°1

Calculer les intégrales suivants :

$\int_0^4 |t-2|dt$, $\int_{-1}^2 (x-|x-1|)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(tx)dt$, $\int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}dx$,

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,sin(t)dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 sin(t)dt$, $\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt$, $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x-\sin x}{x}$, $\int_0^1 (2t+1)\sin\pi(t^2+t+1)dt$

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur R par : f(x) = $sin^4 x$

1°)Exprimer $sin^2 x$ *ainsi que* $cos^2 x$ *en fonction de cos2x.*

2°)Exprimer $sin^4 x$ *en fonction de cos2x et cos4x*

3°)Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=4\sqrt{x}-x$ *pour tout x de* $[0,4]$.

1°)Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *que vous calculez.*

2°)Soit $a\in[0,4]$, *calculer les intégrales :* $I(a)=\int_0^a f(x)dx$ *et* $J(a)=\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy$

3°)Vérifier que $I(a)+J(a)=af(a)$ *. Interprétez géométriquement cette dernière relation..*

EXERCICE N°4

Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) *par :* $S_n = 1+\frac{1}{2^{1/3}}+\frac{1}{3^{1/3}}+\ldots+\frac{1}{n^{1/3}}$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement : $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \le \int_k^{k+1}\frac{dx}{x^{1/3}} \le \frac{1}{k^{1/3}}$

2°) En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^{1/3}} \le S_n \le \int_1^n \frac{dx}{x^{1/3}}+1$.

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) *?*

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) *définie par :* $T_n = 1+\frac{1}{2^{4/3}}+\frac{1}{3^{4/3}}+\ldots+\frac{1}{n^{4/3}}$

est convergente.

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur R_+^* *par :* $f(a)=\int_0^1\sqrt{1-x^a}\,dx$.

1°)Soit pour tout $t\in[0,1]$, $g(t)=1-t-\sqrt{1-t}$.

- *a) Etudier les variations de g*
- *b) En déduire que , pour tout* $t\in[0,1]$, $g(t)\le 0$

2°)Soit pour tout $t\in[0,1]$, $h(t)=1-\frac{t}{2}-\sqrt{1-t}$.

- *c) Etudier les variations de h*
- *d) En déduire que , pour tout* $t\in[0,1]$, $h(t)\ge 0$

3°)En déduire que , pur tout $x\in[0,1]$: $1-x^a \le \sqrt{1-x^a} \le 1-\frac{1}{2}x^a$

4°)En déduire que : $\frac{a}{1+a} < f(a) < \frac{2a+1}{2a+2}$ *.Calculer* $\lim_{a\to+\infty} f(a)$

EXERCICE N°6

1°)Soit $C=\{M(x,y) \;\; / \;\; y=\sqrt{1-x^2} \;\; ,-1\le x\le 1\}$ *et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).Calculer le volume de S.*

2°) Soit $C=\{M(x,y) \;\; / \;\; xy=1 \;\; ,1\le 2x\le 2\}$ *et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.*

3°)Déterminer le volume du cylindre engendré par les rotations d'axe (Ox) du segment de droite :

$y = R$ *et* $0 \le x \le h$ *avec* $h, R \in \mathbb{R}_+^*$

EXERCICE N°7

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *et on pose pour tout n de N* :* $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$

1°)Vérifier que f est décroissante et positive.
2°)Montrer que (s_n) *est croissante.*

3°)Calculer $\int_1^n f(t)dt$ *,* $n \ge 1$ *et en déduire que* $0 \le \int_1^n f(t)dt \le \dfrac{1}{2}$ *et calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\int_1^n f(t)dt\right)$.

4°)Montrer que pour tout entier $k \ge 2$ *:* $\int_k^{k+1} f(t)dt \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

5°)En déduire que pour $n \ge 1$*:* $\int_2^{n+1} f(t)dt \le s_n - f(1) \le \int_1^n f(t)dt$

6°)En déduire que (s_n) *est convergente et donner un encadrement de sa valeur.*