Fiche de cours *$4^{ème}$ sciences*

SUITES REELLES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

Théorème

Soit a un réel fini ou infinie

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, *si et seulement si,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Convergence et divergence

- **Si** $\begin{cases} (u) \text{ est majorée} \\ (u) \text{ est croissante} \end{cases}$ **alors** *(u) est convergente vers un réel* ℓ *et pour tout n de I :* $u_n \le \ell$
- **Si** $\begin{cases} (u) \text{ est minorée} \\ (u) \text{ est décroissante} \end{cases}$ **alors** *(u) est convergente vers un réel* ℓ *et pour tout n de I :* $u_n \ge \ell$
- **Si** $\begin{cases} (u) \text{ est croissante} \\ (u) \text{ est } \underline{\text{non majorée}} \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- **Si** $\begin{cases} (u) \text{ est décroissante} \\ (u) \text{ est } \underline{\text{non minorée}} \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Calcul de limite

- **Si** $\begin{cases} (u) \text{ est convergente vers } \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$
- **Si** $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\ell \text{ fini ou infini}) \\ \lim\limits_{n\to\ell} f(x) = e \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = e$

Soit (u) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Si** $\begin{cases} (u) \text{ est convergente vers } \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{cases}$ **alors** $\ell = f(\ell)$

Suite adjacente

- **Si** $\begin{cases} \forall n \in I \quad u_n \le v_n \\ (u_n) \text{ est croissante et } (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$ **alors** (u_n) *et* (v_n) *convergent vers le même limite*

Théorème d'encadrement

- **Si** $\begin{cases} \exists n_0 \in N \,/\, n \ge n_0 : v_n \le u_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$
- **Si** $\begin{cases} \exists n_0 \in N \,/\, n \ge n_0 : |u_n| \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
- **Si** $\begin{cases} \exists n_0 \in N \,/\, n \ge n_0 : u_n \ge w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- **Si** $\begin{cases} \exists n_0 \in N \,/\, n \ge n_0 : u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Suite arithmétique – Suite géométrique

$***\ Suite\quad arithmétique(s.a)***$	$***\ Suite\quad géométrique(s.g)***$
$u_{n+1}=u_n+r$	$v_{n+1}=qv_n$
$u_n=u_0+nr$	$v_n=v_0q^n$
$u_p=u_s+(p-s)r$	$v_p=v_sq^{p-s}$
$u_2-u_1\neq u_1-u_0\Rightarrow\quad u\quad non\quad s.a$	$\dfrac{v_2}{v_1}\neq\dfrac{v_1}{v_0}\Rightarrow\quad v\quad non\quad s.g$
$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0\end{cases}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\begin{cases}0 & si\quad -1<q<1\\ 1 & si\quad q=1\\ +\infty & si\quad q>1\\ n'existe\ pas & si\quad q\leq -1\end{cases}$
$\bullet\sum\limits_{k=0}^{n}x=\overbrace{x+x+\ldots+x}^{n+1\quad fois\quad x}=(n+1)x$ $\bullet\sum\limits_{k=0}^{n}k=1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $\bullet\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n=\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ $\bullet\sum\limits_{k=p}^{n}u_k=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=\dfrac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$	$pour\quad tout\quad q\in R^*-\{1\}$ $\bullet\sum\limits_{k=0}^{n}q^k=1+q^1+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\bullet\sum\limits_{k=p}^{n}q^k=q^p+q^{p+1}+\ldots+q^n=\dfrac{q^p-q^{n+1}}{1-q}$