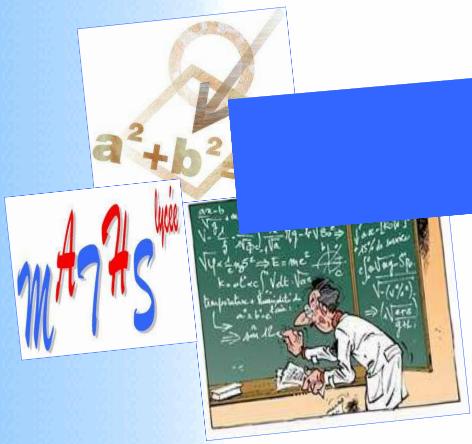

Maths au lycée

Site éducatif en mathématiques
http// :maths-akir.midiblogs.com

Maths au lycée, site éducatif
Téléchargement gratuit :
Fiche de cours
Séries d'exercices
Devoirs des contrôles et des synthèses
Sujets de révisions pour préparer bien le baccalauréat
Plus un forum de maths pour répondre à tout questions.

Site : http://maths-akir.midiblogs.com
Email: akir.cm@gmail.com
GSM: 24 96 24 30
Mr.: Ali Akir

Exercice n°1

Partie I		Partie II	
Question n°1	Question n°2	Question n°1	Question n°2
c	b	a	b

Démonstrations

Partie I

Question n°2

On a f est une fonction polynôme du second degré alors il existe a , b , c réels tel que $f(x)=ax^2+bx+c$ alors $f'(x)=2ax+b$.

f et un extremum en point $M(x_0,f(x_0))$ tel que $f'(x_0)=0$ alors $x_0=-\frac{b}{2a}$.

Or f(-2)=0 alors 4a-2b+c=0 et on a f(3)=0 alors 9a+3b+c=0 ainsi 5a+5b=0 donc a = -b.

Alors $x_0=-\frac{-a}{2a}=\frac{1}{2}$

Partie II

Question n°1

On a $A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax+b)dx=\frac{a}{2}+b$

Or $f'(x)=a$ et f(0) = b alors $A=\frac{1}{2}f'(0)+f(0)=\frac{1}{2}\left(f'(0)+2f(0)\right)$

Question n°2

On a $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 (ax+b)^2dx=\frac{\pi}{3}\left(a^2+3a^2b+3b^2\right)=\frac{\pi}{3}\left(f'(0)^2+3f'(0)f(0)+3f(0)^2\right)$

Exercice n°2 (bac p.2008)

1°)On a $\begin{cases}B=D*I\\O=C*I\end{cases}$ alors $\begin{cases}(DC)//(BO)\\DC=2OB\end{cases}$

On a $\begin{cases}f(A)=D\\f(O)=C\end{cases}$ alors $\begin{cases}k=\frac{DC}{OA}=\frac{2OB}{OA}=2\\ \theta\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

2°)a)On a $(OI)\perp(AD)$ car OAB est un triangle rectangle en O et I = A*B alors $(CI)\perp(AD)$

Or (DC)//(OB) et $(OB)\perp(OA)$ alors $(DC)\perp(OA)$.

On a : $\begin{cases}O\in(OA)\perp(DC)\\O\in(CI)\perp(AD)\end{cases}$ alors O est l'orthocentre du triangle ACD

b)

*)On a f(O) = C et f est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors f((OJ)) est une droite passe par le point C et perpendiculaire à la droite (OJ) alors $\underline{f((OJ))=(AC)}$

*)On a f(A) = D et f est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors f((AJ)) est une droite passe par le point D et perpendiculaire à la droite (AJ) alors $\underline{f\left((AJ)\right)=(DJ)}$

*) On a $\{J\}=(AJ)\cap(OJ)$ alors $\{f(J)\}=f\left((AJ)\right)\cap f\left((OJ)\right)$ donc $\{f(J)\}=(DJ)\cap(AC)=\{J\}$
Alors J est le centre de la similitude f .

3°)a)

*)On a $\begin{cases} g(A)=D \\ g(I)=I \end{cases}$ alors $k'=\frac{ID}{IA}=\frac{2IB}{IA}=2$

*)On a $g\left((AI)\right)=(DI)=(AI)$ alors l'axe de g soit (AI) soit (CI) car (CI) est la perpendiculaire à (AI) en I.

Or la forme réduite de g est $g=h_{(I,2)}\circ S_{\Delta}$

Si $\Delta=(AI)$ alors $g(A)=h_{(I,2)}(A)=D$ alors $\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IA}$ impossible car $\overrightarrow{ID}=-2\overrightarrow{IA}$

Alors g d'axe (CI). $\underline{g=h_{(I,2)}\circ S_{(CI)}}$

*)On a $g(O)=h_{(I,2)}\circ S_{(CI)}(O)=h_{(I,2)}(O)$ car $O\in(CI)$ or on a $2\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IC}$ alors g(O) = C

b)

*)On a f(O)= C alors $f^{-1}(C)=O$ et g(O) = C alors $g\circ f^{-1}(C)=C$

On a f(A) =D alors $f^{-1}(D)=A$ et g(A) = D alors $g\circ f^{-1}(D)=D$

*)On a g est une similitude indirect de rapport 2 et f^{-1} est une similitude direct de rapport $\frac{1}{2}$.

Alors $g\circ f^{-1}$ est une similitude indirect de rapport $2\times\frac{1}{2}=1$ donc $g\circ f^{-1}$ est une antidéplacement or $g\circ f^{-1}((CD))=(CD)$ alors $g\circ f^{-1}$ est une symétrie axiale d'axe (CD)

4°) $I'=f(I)$ et $J'=g(J)$.

a)On a $f^{-1}(J)=J$ alors $g\circ f^{-1}(J)=g(J)=J'$

On a $f^{-1}(I')=I$ alors $g\circ f^{-1}(I')=g(I)=I$

b)Soit $\{K\}=(CD)\cap(IJ)$

On a $g\circ f^{-1}(K)=K$ car $K\in(CD)$

Alors $\{S_{(CD)}(K)\}=S_{(CD)}\left((CD)\right)\cap S_{(CD)}\left((IJ)\right)$

Alors $\{K\}=(CD)\cap(I'J')$ car $g\circ f^{-1}(IJ)=(I'J')$ car $S_{(CD)}(I')=I$ alors $S_{(CD)}(I)=I'$

Ainsi $K\in(I'J')$

Alors les droites (IJ) , $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Exercice n°3

Pour tout réel t tel que: $0\le t\le\frac{\pi}{2}$: $I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}(t)\,dt$ et $J_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2k}(t)\,dt$ où $k\in\mathbb{N}$

1°)Soit pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $s(t)=t-\frac{\pi}{2}\sin(t)$ alors $s'(t)=1-\frac{\pi}{2}\cos(t)$ et $s''(t)=\frac{\pi}{2}\sin(t)\ge0$

On a $s''(t)\ge0$ alors s' est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $s'\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[1-\frac{\pi}{2};1\right]$

On a $\begin{cases} f \text{ est continue sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ f \text{ est strictement croissante sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ f(0)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0 \end{cases}$ alors d'après TVI il existe une unique $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

tel que $s'(\alpha)=0$ alors

	0	α	$\frac{\pi}{2}$
s'	-		+
s	$0 \searrow$		$\nearrow 0$

Alors pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $s(t)\le 0$ ainsi $t\le\frac{\pi}{2}\sin(t)$.

2°)On a pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $0\le t\le\frac{\pi}{2}\sin(t)$ alors $0\le t^2\le\frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)$

alors $0\le t^2\cos^{2k}(t)\le\frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2k}(t)=\frac{\pi^2}{4}\cos^{2k}(t)-\frac{\pi^2}{4}\cos^{2k+2}(t)$

alors $0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2k}(t)dt\le\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}(t)dt-\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k+2}(t)dt$

alors $0\le J_k\le\frac{\pi^2}{4}(I_k-I_{k+1})$.

3°) $I_{k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k+2}(t)\,dt \;=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))\cos^{2k}(t)\,dt \;=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}(t)\,dt - =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{2k}(t)\,dt$

$\begin{cases} u'(t)=\sin(t)\cos^{2k}(t) \\ v(t)=\sin(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t)=-\frac{1}{2k+1}\cos^{2k+1}(t) \\ v'(t)=\cos(t) \end{cases}$

alors $I_{k+1}=I_k-[u(t)v(t)]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k+2}\,dt \;=I_k-\frac{1}{2k+1}I_{k+1}$

alors pour tout entier k tel que $k\ge 0: I_{k+1}=\frac{2k+1}{2k+2}I_k$

4°) On a pour tout entier k tel que $k\ge 0$: $0\le J_k\le\frac{\pi^2}{4}(I_k-I_{k+1})$.

Or pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^{2k}(t)>0$ alors $I_k>0$

Alors $0\le\frac{J_k}{I_k}\le\frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{I_{k+1}}{I_k}\right)$ d'où $0\le\frac{J_k}{I_k}\le\frac{\pi^2}{8(k+1)}$ Or $\lim_{k\to+\infty}\frac{\pi^2}{8(k+1)}=0$ alors $\lim_{k\to+\infty}\frac{J_k}{I_k}=0$.

5°)On a $J_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2k}(t)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))t^2\cos^{2k-2}(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2k-2}(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)t^2\cos^{2k-2}(t)\,dt$

$$J_k = J_{k-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) t^2 \cos^{2k-2}(t)\,dt$$

$$\begin{cases} u'(t) = -\sin(t)\cos^{2k-2}(t) \\ v(t) = t^2\sin(t) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{2k-1}\cos^{2k-1}(t) \\ v'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t) \end{cases}$$

$$J_k = J_{k-1} + [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \frac{2}{2k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2k-1}(t)\,dt - \frac{1}{2k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2k}(t)dt$$

$$J_k = J_{k-1} - \frac{2}{2k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2k-1}(t)\,dt - \frac{1}{2k-1}J_k$$

$$\begin{cases} u'(t) = -\sin(t)\cos^{2k-1}(t) \\ v(t) = t) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{2k}\cos^{2k}(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

$$J_k = J_{k-1} + \frac{2}{2k-1}\left([u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}(t)\right) - \frac{1}{2k-1}J_k$$

$$J_k = J_{k-1} - \frac{1}{k(2k-1)}I_k - \frac{1}{2k-1}J_k \text{ alors } k(2k-1)J_k = k(2k-1)J_{k-1} - I_k - kJ_k$$

Alors pour tout entier k tel que $k \geq 1$: $I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}$

6°)On a pour tout entier k tel que $k \geq 1$: $I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}$ et $I_k = \dfrac{2k-1}{2k}I_{k-1}$

Alors $\dfrac{I_k}{I_k} = -2k^2\dfrac{J_k}{I_k} + k(2k-1)\dfrac{J_{k-1}}{I_k}$ ainsi $1 = -2k^2\dfrac{J_k}{I_k} + k(2k-1)\dfrac{2k}{2k-1}\dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}}$

D'où $1 = -2k^2\dfrac{J_k}{I_k} + 2k^2\dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}}$ alors $\dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \dfrac{J_k}{I_k} = \dfrac{1}{2k^2}$

7°) On a pour tout entier k tel que $k \geq 1$: $\dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \dfrac{J_k}{I_k} = \dfrac{1}{2k^2}$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k}\right) = \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_1}{I_1}\right) + \left(\frac{J_1}{I_1} - \frac{J_2}{I_2}\right) + \ldots + \left(\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n}\right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}$

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}\right)$

Or $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt = \frac{\pi^3}{24}$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{J_n}{I_n}\right)$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{J_n}{I_n} = 0$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$