32^{e} Championnat International

Des Jeux Mathématiques et Logiques

***

1/4 DE FINALES INDIVIDUELS 2018

Proposition d'une Solution de l'1/4 de finales Individuels 2018

Proposé par : AKIR Ali

Tél. : 24962430

E-mail : akir.cm@gmail.com

Source disponible sur : http://maths-akir.midiblogos.com

A partir du 31/12/2017 à 24h00

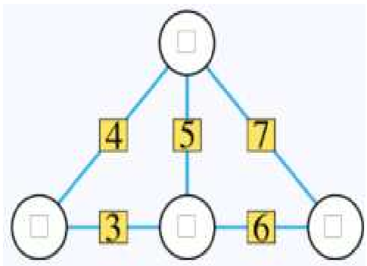
Le 22 octobre 2017

NB : Correction individuel non officiel

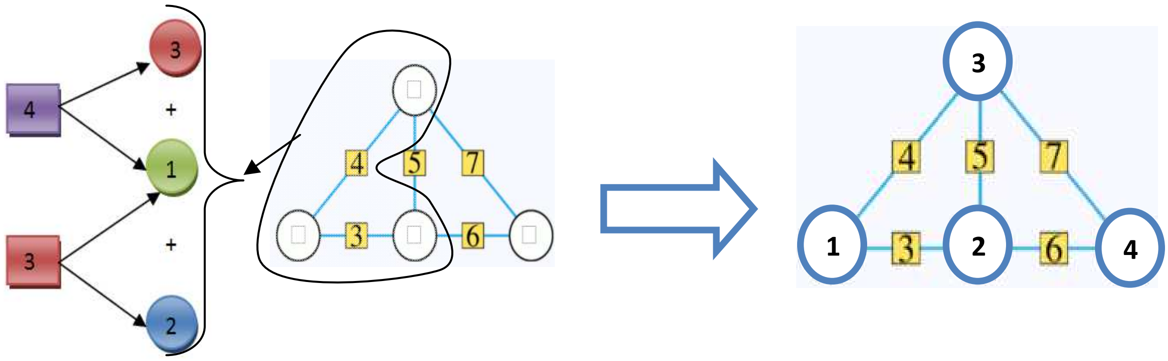
DEBUT TOUTES CATEGORIES

1 - QUATRE NOMBRES A PLACER (coefficient 1)

Placez les nombres 1, 2, 3 et 4 dans les disques de telle sorte que chaque nombre écrit dans un petit carré soit égal au total des deux nombres auxquels il est relié par un trait.



SOLUTION

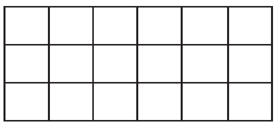


2 - LES CARRES (coefficient 2)

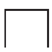
Le jeune Mathis : « Il y a 18 carrés dans cette figure ».

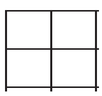
Sa soeur Mathilde : « Oui, si tu ne comptes que les petits carrés, mais il y a aussi des carrés moyens et des grands carrés ! ».

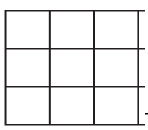
Au total, combien la figure compte-t-elle de carrés entièrement dessinés ?



SOLUTION

Nombre des carrés de coté 1 :  **18**

Nombre des carrés de coté 2 :  **10**

Nombre des carrés de coté 3 :  **4**

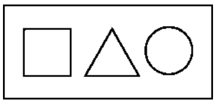
Nombre des carrés entièrement dessinés dans cet figure est : 18+10+4=32 carrés

Réponse : 32 carrés

3 - A LA MATERNELLE (coefficient 3)

La maîtresse a distribué à chaque enfant d'un groupe une feuille avec ces trois symboles et trois feutres de trois couleurs différentes (un bleu, un rouge et un jaune). Elle leur donne la consigne de colorier l'intérieur de chaque symbole avec une couleur de façon que deux symboles d'une même feuille ne soient jamais de la même couleur. Les enfants se sont appliqués et ont respecté la consigne. Seuls deux enfants du groupe ont des dessins identiques, les autres étant tous différents.

Combien le groupe compte-t-il d'enfants, au maximum ?



SOLUTION

Couleur possible de	Couleur possible de	Couleur possible de	Couleur final

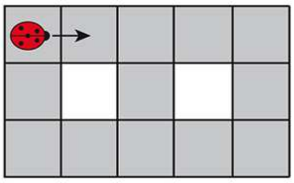
Conclusion : le nombre d'enfant au maximum dans cet groupe est : 6+1 = 7 enfants

Réponse : 7

4 - LA COCCINELLE (coefficient 4)

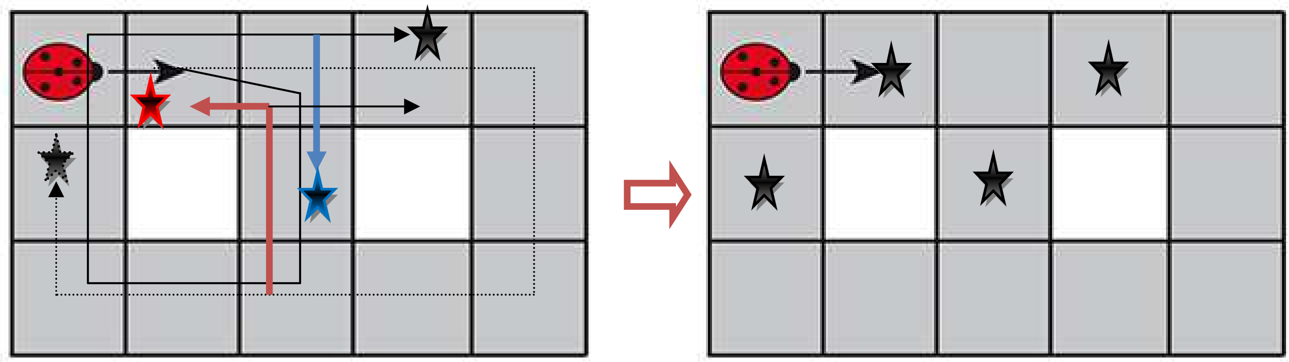
Une coccinelle se déplace sur les treize cases grisées d'un circuit. Le premier déplacement se fait dans le sens de la flèche. Elle se déplace d'une case par seconde et quand elle a le choix, elle peut aller d'un côté ou de l'autre, mais elle ne revient jamais en arrière.

Marquez d'une croix toutes les cases sur lesquelles elle peut se trouver après exactement 11 secondes.



SOLUTION

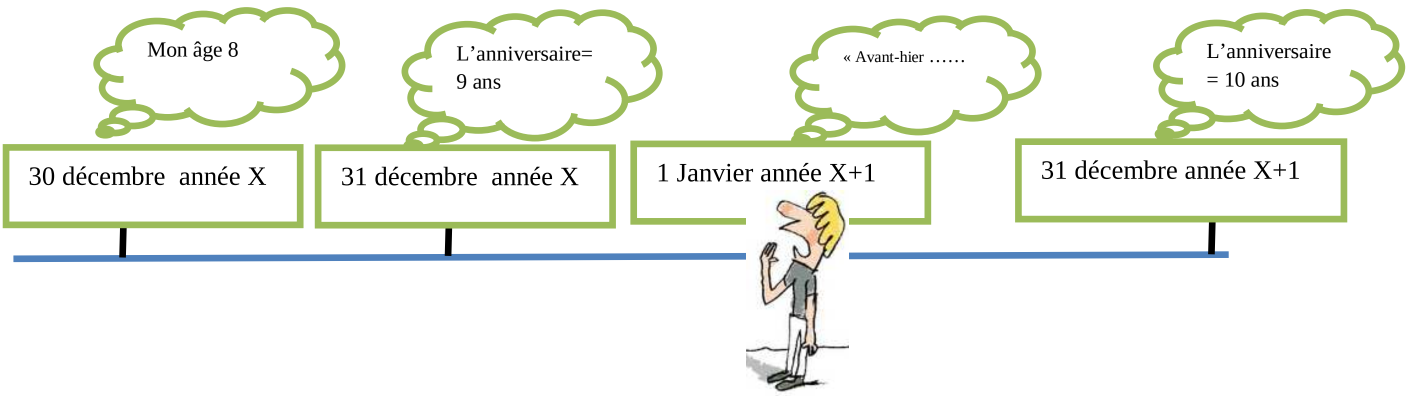
Les trajets possibles :



5 - L'ANNIVERSAIRE (coefficient 5)

« Avant-hier je n'avais encore que 8 ans, mais à la fin de l'année, j'aurai déjà 10 ans » dit le jeune Mathis.

Quel jour de l'année Mathis fête-t-il son anniversaire ?



Réponse : 31 décembre

FIN CE

6 - SUITE (coefficient 6)

Le premier terme d'une suite est 718.

Chaque terme suivant est égal à la somme des chiffres du terme précédent multipliée par 13.

Quel est le 2018e terme de cette suite ?

SOLUTION

On a $U_1 = 718$;

$U_2 = (7+1+8)\times 13 = 208$;

$U_3 = (2+0+8)\times 13 = 130$

$U_4 = (1+3+0)\times 13 = 52$

$U_5 = (5+2)\times 13 = 91$

$U_6 = (9+1)\times 13 = 130 = U_3$

$U_7 = (1+3+0)\times 13 = 52 = U_4$

$U_8 = (5+2)\times 13 = 91 = U_5$

Donc U est une suite périodique de période 3 à partir de n= 3

Alors Pour tout entier $n \geq 3$ on a $U_{n+3} = U_n$

Donc $U_{2018} = U_{5+671\times 3} = U_5 = 91$

Réponse : 91

7 - LE LIVRE DE MATHILDE (coefficient 7)

Mathilde a reçu pour son anniversaire un livre ayant 225 pages qui compte trois chapitres. La somme des chiffres des numéros des deux premières pages du deuxième chapitre est égale à 18. Par un curieux hasard, la somme des chiffres des numéros de deux dernières pages de ce même deuxième chapitre (qui compte plus de 2 pages) est aussi égale à 18.

Quel est le nombre des pages du 2e chapitre de ce livre ?

SOLUTION

Le problème se traduit à : ***Trouver les entiers naturels p compris entre 1 et 225 tel que la somme des chiffres de l'entier p et p+1 égale à 18.***

Soit S : la somme des chiffres de l'entier p et p+1.

Cas n°1 : $1 \leq p \leq 8$ alors $S = p + p + 1 = 2p + 1 = 18$ Impossible

Cas n°2 : $p = 9$ alors $p + 1 = 10$ donc $S = 9 + 1 + 0 = 10 \neq 18$ Impossible

Cas n°3 : $10 \leq p \leq 99$ alors il existe $x_1, x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tel que l'écriture de p en base 10 est $p = \overline{x_1 x_2}$

Alors $p + 1 = 1 + \overline{x_1 x_2}$

- **Cas n°3.1 :** $x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ alors $p + 1 = \overline{x_1(1+x_2)}$ alors $S = p + p + 1 = x_1 + x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 2(x_1 + x_2) + 1 = 18$ Impossible
- **Cas n°3.2 :** $x_2 = 9$ et $x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ alors $p + 1 = \overline{(1+x_1)0}$ alors $S = p + p + 1 = x_1 + 9 + x_1 + 1 = 2x_1 + 10 = 18$

Donc $x_1 = 4$ alors $\underline{p = 49}$

- **Cas n°3.3 :** $x_2 = 9$ et $x_1 = 9$ alors $p + 1 = 100$ alors $S = p + p + 1 = 9 + 9 + 1 = 19 \neq 18$ Impossible

Donc $x_1 = 4$ alors $\underline{p = 49}$

Cas n°4 : $100 \leq p \leq 225$ alors il existe $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tel que l'écriture de p en base 10 est $p = \overline{x_1x_2x_3}$

- **Cas n°4.1 :** $x_3 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ alors $p+1 = \overline{x_1x_2(1+x_3)}$ alors $S = p+p+1 = 2(x_1+x_2+x_3)+1 = 18$ Impossible
- **Cas n°4.2 :** $x_3 = 9$ et $x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ alors $p+1 = \overline{x_1(1+x_2)0}$ alors $S = p+p+1 = 2(x_1+x_2)+10 = 18$

Donc $x_1 + x_2 = 4 (= 2+2 = 1+3)$ et on a $x_3 = 9$ et $p \leq 225$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ donc $\underline{p = 139}$

- **Cas n°4.3 :** $x_3 = 9$ et $x_2 = 9$ alors $p = \overline{x_1 99}$ donc $S > 18$ car $x_1 \geq 1$ Impossible

Conclusion :

Chapitre 1		**Chapitre 2**		**Chapitre 3**	
Page1	**page 48**	**Page 49**	**page 140**	**Page 141**	**page 225**

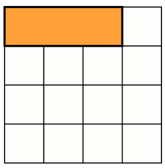
Nombre des pages du 2e chapitre est : 140-49+1 = 92 pages

Réponse : 92

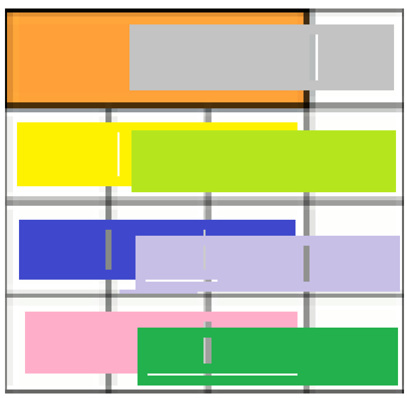
8- LES TRIMINOS (coefficient 8)

Un trimino est un assemblage de trois petits carrés. On pose des triminos rectangulaires sur une grille carrée de 4 cases sur 4 (voir la figure où un premier trimino est posé). Chaque trimino doit recouvrir exactement trois carrés de la grille dont au moins un carré vide. Il peut donc éventuellement recouvrir d'une case ou de deux cases un trimino déjà posé.

En comptant le trimino déja posé, combien de triminos rectangulaires peut-on poser, au maximum, en respectant la règle ?



SOLUTION



Réponse : 8

9 - LE CLUB DE BASKET (coefficient 9)

Dans ce club de basket, il y avait exactement 40 % de garçons. Six nouveaux garçons se sont inscrits et il y a maintenant autant de garçons que de filles.

Combien ce club compte-t-il maintenant d'inscrits (filles et garçons) ?

SOLUTION

Notation

x : le nombre d'adhérents dans le club de basket avant l'inscrit de 6 garçons

g : le nombre des garçons adhérents dans le club de basket avant l'inscrit de 6 garçons

f : le nombre des fille adhérents dans le club de basket

y : le nombre d'adhérents dans le club de basket après l'inscrit de 6 garçons

on a $g = 0{,}4\,x$, $f = 0{,}6\,x$ et $g + 6 = f$ alors $0{,}4\,x + 6 = 0{,}6x$ ainsi $x = 30$ et $y = x + 6 = 36$

Réponse : 36

10 - LOTERIE (coefficient 10)

Dans une loterie, on a vendu 10 000 billets numérotés de 0000 à 9999. Le tirage au sort se fait de la manière suivante :

• on tire au sort un nombre à trois chiffres ;

• tous les billets dont le numéro contient tous les chiffres du nombre tiré sont gagnants

On a tiré au sort le nombre 116. Les billets gagnants seront donc tous les billets contenant au moins deux 1 et au moins un 6 et seulement ceux-là. **Combien y aura-t- il de gagnants ?**

SOLUTION 1

La bille gagnant peut s'ecrit sous la forme :

1	1	6	x

Où $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Si $x = 1$

1	1	6	1

Alors on a $\frac{4!}{3!} = 4$ cas possible

Si $x = 6$

1	1	6	6

Alors on a cas possible

Si $x \neq 6$ et $x \neq 1$

1	1	6	x

Alors on a $\frac{4!}{2!} \times 8 = 96$ cas possible ($x \in \{0,2,3,4,5,7,8,9\}$)

Conclusion : on a 4+6+96=106 cas possible

SOLUTION 2 : arbre des choix

Réponse : 106

11 - LE BATEAU (coefficient 11)

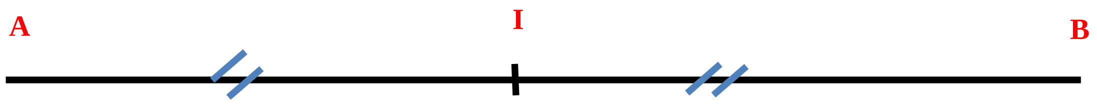
Un bateau, après avoir effectué la moitié de son trajet, a augmenté sa vitesse de 25% en raison de la menace d'une tempête.

Il est alors arrivé au port une demi heure plus tôt que prévu.

Combien de temps ce bateau a navigué ?

On donnera la réponse en heures et minutes, éventuellement arrondie à la minute la plus proche.

SOLUTION



Soit t le temps d'arrivée du bateau avec la vitesse V_A .

Soit t' le temps d'arrivé réelle

On a $t = \frac{AB}{V_A}$ et $t' = (t - 0{,}5)$heures

$$t' = t_{A\to I} + t_{I\to B} \Rightarrow t - 0{,}5 = \frac{AI}{V_A} + \frac{IB}{1{,}25V_A} = \frac{AB}{2V_A} + \frac{AB}{2{,}5V_A} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2{,}5}$$

$$\Rightarrow t\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2{,}5}\right) = 0{,}5 \Rightarrow t = 5h \quad \text{alors } t' = t - 0{,}5 = 4h30\text{munites}$$

Réponse : 4h30minutes

FIN C1

12 - COURSE AUTOMOBILE (coefficient 12)

Deux automobilistes sont partis simultanément l'un d'Arithméville vers Géocity et l'autre de Géocity vers Arithméville, ces deux villes étant éloignées de 200 km. Ils ont roulé à des vitesses constantes différentes s'exprimant par des nombres entiers de km/h dont la différence est un multiple de 7. Après deux heures de déplacement la distance entre la voiture la plus rapide et Géocity était cinq fois plus petite que celle entre la voiture la plus lente et Arithméville.

Quelle est la vitesse de la voiture la plus rapide ?

On donnera la réponse en km/h.

SOLUTION

Notation :

V_A : Vitesse de l'automobile qui part d'Arithméville

V_G : Vitesse de l'automobile qui part de Géocity

ℓ_A : la longueur de trajet parcourir par automobile A pendant 2 heures

ℓ_G : la longueur de trajet parcourir par automobile G pendant 2 heures

ℓ : la longueur de trajet entre Arithméville et Géocity

Donner :

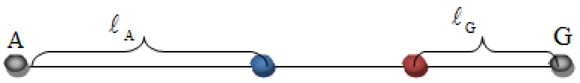
V_A, V_G deux entiers naturels non nul et différents

Il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $V_A - V_G = 7k$

$\ell = 200kM$

$\ell_A = t \times V_A = 2V_A$, $\ell_G = t \times V_G = 2V_G$

Cas n°1 : $V_A > V_G$



On a : $5(\ell - \ell_A) = \ell - \ell_G$ alors $5(\ell - 2V_A) = \ell - 2V_G$ donc $5V_A - V_G = 2\ell$ ainsi $5V_A - V_G = 400$

D'autre part $V_A - V_G = 7n$ ou $n \in \mathbb{N}^*$

Alors $V_A = 100 - \frac{7}{4}n$ et $V_G = 5V_A - 400$

Or $V_G \geq 1$ alors $V_A \geq \frac{400}{5} = 80kM/h$

Et comme $V_A = 100 - \frac{7}{4}n$ alors $n \leq 11$

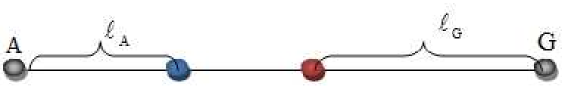
Et comme $V_A \in \mathbb{N}^*$ alors n est un multiple de 4

Donc $n = 4$ **ou** $n = 8$

Pour $n = 4$: $V_A = 93\ kM/h$ et $V_G = 65\ kM/h$

Pour $n = 8$: $V_A = 86\ kM/h$ et $V_G = 30\ kM/h$

Cas n°2 : $V_A < V_G$



On a : $\ell_A = 5\ell_G$ alors $V_A = 5V_G$ et comme $V_G - V_A = 7n$ ou $n \in \mathbb{N}^*$ alors $4V_G = -7n < 0$ ce qu'est contradictoire

Réponse :

2 solutions : Solution 1 : 93kM/h et Solution 2 : = 86kM/h

13 - UN MULTIPLE SINGULIER (coefficient 13)

Quel est le plus petit multiple de 2018 dont l'écriture décimale commence par 1111… ?

Répondez 0 si vous pensez qu'un tel multiple n'existe pas.

SOLUTION

Cas n°1 : On commence par le nombre à 5 chiffres $\overline{1111x_1}$

$\overline{1111x_1}$ est un multiple de 2018 si et seulement le reste de la division euclidienne de $\overline{1111x_1}$ par 2018 est 0.

$\overline{1111x_1} = 2018\times5+1020+x_1$ en effet $\overline{1111x_1} = 11110+x_1$ et $11110 = 2018\times5+1020$ et comme $1020+x_1 < 2018$

Alors pour tout $x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, le nombre $\overline{1111x_1}$ n'est pas un multiple de 2018

Cas n°2 : le nombre à 6 chiffres $\overline{1111x_1x_2}$

$\overline{1111x_1x_2} = 2018\times55+110+\overline{x_1x_2}$ en effet $\overline{1111x_1x_2} = 111100+\overline{x_1x_2}$ et $111100 = 2018\times55+110$

et comme $110+\overline{x_1x_2} < 110+100 = 210 < 2018$ Alors pour tout $x_1, x_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, le nombre $\overline{1111x_1x_2}$ n'est pas un multiple de 2018

Cas n°3 : le nombre à 7 chiffres $\overline{1111x_1x_2x_3}$

$\overline{1111x_1x_2x_3} = 2018\times550+1110+\overline{x_1x_2x_3}$ en effet $\overline{1111x_1x_2x_3} = 1111000+\overline{x_1x_2x_3}$ et $1111000 = 2018\times550+1100$

et pour que $1100+\overline{x_1x_2x_3}$ égale 2018 il suffit que $\overline{x_1x_2x_3} = 918$ alors 1111918 est le plus petit nombre **multiple de 2018 dont l'écriture décimale commence par 1111…**

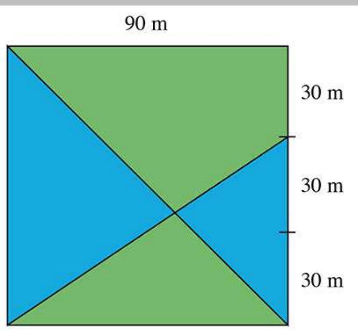
Réponse : 1111918

14 - LE PETIT BOIS (coefficient 14)

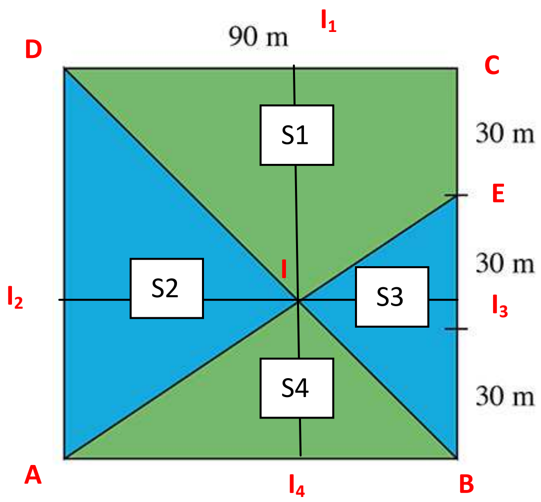
Le petit bois derrière chez moi est un carré de 90 m de côté. Deux allées le traversent : l'une selon une diagonale du carré, l'autre joignant un sommet à un point situé aux 2/3 d'un côté, comme l'indique la figure. Ces deux allées partagent le bois en quatre parcelles.

Quelle est l'aire de la plus grande de ces quatre parcelles ?

On donnera la réponse en mètres carrés et on arrondira éventuellement au m² le plus proche.



SOLUTION



$S_4 = \frac{1}{2} AB \times II_4 = 45 \times II_4$

$S_3 = \frac{1}{2} BE \times II_3 = 30 \times II_3$

$S_2 = \frac{1}{2} AD \times II_2 = 45 \times II_2$

D'autre part $S_2 + S_4 = \frac{1}{2} AB \times AD = 45 \times 90 = 4050 = 45 \times (II_2 + II_4)$ alors $\underline{II_2 + II_4 = 90}$

$S_4 + S_3 = \frac{1}{2} AB \times BE = 30 \times 90 = 2700 = 45 \times II_4 + 30 \times II_3$ alors $\underline{3 \times II_4 + 2 \times II_3 = 180}$ alors $\underline{2 \times II_3 - 3II_2 = -90}$

Et comme $\underline{II_2 + II_3 = 90}$ alors $\underline{II_3 = 36}$ et $\underline{II_2 = 54}$

Conclusion : $\underline{II_1 = 54}$, $\underline{II_2 = 54}$, $\underline{II_3 = 36}$ et $\underline{II_4 = 36}$

$S_4 = 1620$, $S_3 = 1080$, $S_2 = 2430$ et $S_1 = 90 \times 90 - (S_3 + S_2 + S_4) = 2970$

Réponse : 2970

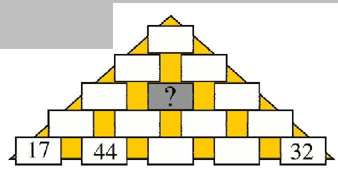
FIN C2

15 - LA PYRAMIDE DE MICK ERINOS (coefficient 15)

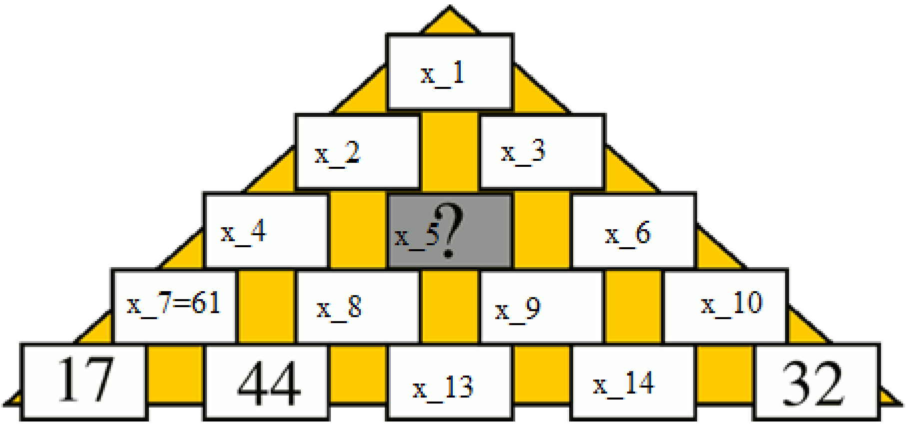
61Dans la pyramide de Mick Erinos, chaque brique contient un nombre entier positif, et à partir du premier étage un nombre égal égal à la somme des deux nombres inscrits dans les briques sur lesquelles elle est posée.

La somme de tous les nombres inscrits dans la pyramide vaut 2018.

Quel est le nombre écrit dans la brique grise ?



SOLUTION



On a $2018=\sum_{k=1}^{15} x_k =$

$=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+61+x_8+x_9+x_{10}+17+44+x_{13}+x_{14}+32$

$=154+\underbrace{x_1}_{=x_2+x_3}+\overbrace{x_2}^{=x_4+x_5}+\underbrace{x_3}_{=x_5+x_6}+x_4+x_5+x_6+x_8+x_9+x_{10}+x_{13}+x_{14}$

$=154+2(x_4+2x_5+x_6)+x_4+x_5+x_6+x_8+x_9+x_{10}+x_{13}+x_{14}$

$=154+3\underbrace{x_4}_{=61+x_8}+5\overbrace{x_5}^{=x_8+x_9}+3\underbrace{x_6}_{=x_9+x_{10}}+x_8+x_9+x_{10}+x_{13}+x_{14}$

$=337+9x_8+9x_9+4x_{10}+x_{13}+x_{14}$

$=337+9\underbrace{x_8}_{=44+x_{13}}+9\overbrace{x_9}^{=x_{13}+x_{14}}+4\underbrace{x_{10}}_{=32+x_{14}}+x_{13}+x_{14}$

$=861+19x_{13}+14x_{14}=2018$

Alors $(E):1157=19x_{13}+14x_{14}$

Résolution d'équation (E)

Solution particulier :

$19=14\times1+5$

$14=5\times2+4$

$5=4\times1+1$

$1=5-4\times1=5\times3-14=3\times(19-14)-14=19\times3+14\times(-4)$

Alors $1157=19\times3471+14\times(-4628)$

Solution particulier $(x_{013};x_{014})=(3471;-4628)$

Solution générale :

On a $0=19(x_{13}-x_{013})+14(x_{14}-x_{014})$ alors $19(x_{13}-x_{013})=-14(x_{14}-x_{014})$

Or $\begin{cases}14\wedge19=1\\14|19(x_{13}-x_{013})\end{cases}$ alors $14|\ (x_{13}-x_{013})$ donc il existe un entier k tel que $x_{13}==3471+14k$ et $x_{14}=-4628-19k$

Vérifier la réciproque : ….

Trouver : x_5

On a $0 \le x_{13} \le 1864$ et $0 \le x_{14} \le 1864$ alors $-247 \le k \le -115$ et $-341 \le k \le -244$ alors $\underline{-247 \le k \le -244}$

Et comme $x_5 = 44 + 2x_{13} + x_{14}$ alors

Pour $k = -247$, $(x_{13}; x_{14}) = (13;65)$ et $\boxed{x_5 = 135}$

Pour $k = -246$, $(x_{13}; x_{14}) = (27;46)$ et $\boxed{x_5 = 144}$

Pour $k = -245$, $(x_{13}; x_{14}) = (41;27)$ et $\boxed{x_5 = 153}$

Pour $k = -244$, $(x_{13}; x_{14}) = (55;8)$ et $\boxed{x_5 = 162}$

Réponse :

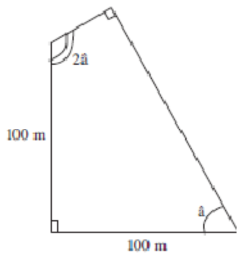
4 solutions : Solution 1 : 135 et Solution 2 : 144

16 - LE TERRAIN DU PERE FIDE (coefficient 16)

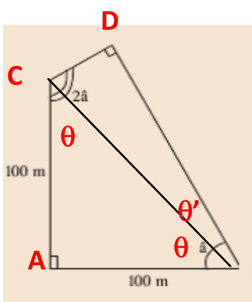
Le père Fide possède un terrain quadrilatéral. Ce terrain possède deux côtés perpendiculaires de 100 mètres de long, deux angles opposés droits et deux autres angles dont l'un mesure le double de l'autre.

Quelle est l'aire du terrain du Père Fide ?

On donnera la réponse en mètres carrés et on arrondira éventuellement au m² le plus proche.



SOLUTION



ABC est un triangle rectangle isocèle en A alors $\theta = 45^\circ$ et comme $a + 2a = 180^\circ$ alors $a = 60^\circ$ ainsi $\theta' = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

$$S_{ABDC}=S_{ABC}+S_{BDC}=\frac{1}{2}AB\times AC+\frac{1}{2}\sin(\theta')\times BD\times BC \text{ et comme } BD=BC\cos(\theta')$$

alors $S_{ABDC}=\frac{100^2}{2}+\frac{1}{2}\sin(\theta')\times\cos(\theta')\times BC^2=\frac{100^2}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta')(AC^2+AB^2)=\frac{100^2}{2}+\frac{(100^2+100^2)}{8}=\frac{3}{4}\times 100^2=7500$

Réponse : 7500

FIN L1 GP

17 - SUCCESSEUR ET DOUBLE (coefficient 17)

Le nombre 2018 est le double d'un nombre premier, 1009, et le successeur d'un autre nombre premier, 2017.

Quelle sera la prochaine année dont le numéro sera à la fois double et successeur d'un nombre premier ?

Réponse : 2138

18 - SOMME DES CUBES (coefficient 18)

Mathias adore jouer avec les nombres. Il choisit un premier nombre, calcule la somme des cubes de ses chiffres et écrit le résultat qui sera son deuxième nombre. Il recommence ensuite avec ce deuxième nombre, puis recommence encore et encore jusqu'à ce qu'il tombe sur un nombre déjà écrit. Ainsi, s'il part de 1012, il écrit : 1012 ; 10 ; 1 ; 1 et il s'arrête.

Quel est le plus petit nombre supérieur à 2018 qui lui permettra de s'arrêter sur le nombre 1 ?

Réponse : 2101

FIN L2 HC