

Dans le plan complexe  $P$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

**Propriétés :** Soit  $M$  un point d'affixe  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

$a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$	$b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$	$ z  = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$
$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$	$ z  = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$z \times \bar{z} =  z ^2$ , $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ , $z \in \mathbb{C}^*$
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$	$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$	$AB =  z_B - z_A $
$\operatorname{Aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A$	$I = A * B \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	$\operatorname{Aff}(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\operatorname{Aff}(\vec{u}) + b\operatorname{Aff}(\vec{v})$
$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ , $z \in \mathbb{C}^*$	$a \in \mathbb{R}_+ : z^2 = a \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$ $a \in \mathbb{R}_- : z^2 = a \Leftrightarrow z = i\sqrt{ a }$ ou $z = -i\sqrt{ a }$	$(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

**Propriétés :** Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  et tout entier  $n$  on a :

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	$\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ , ( $z \neq 0$ )	$\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{(\bar{z})^n}$ , ( $z \neq 0$ )	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ , ( $z' \neq 0$ )

$ zz'  =  z  \times  z' $	$ z^n  =  z ^n$	$z\bar{z} =  z ^2$
$\left \frac{1}{z}\right  = \frac{1}{ z }$ , ( $z \neq 0$ )	$\left \frac{1}{z^n}\right  = \frac{1}{ z ^n}$ , ( $z \neq 0$ )	$ z + z'  \leq  z  +  z' $

### Forme cartésien - Forme trigonométriques

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

Forme cartésien  
 $z = a + ib$

Forme trigonométriques  
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta), r > 0$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  non nuls d'écriture trigonométriques :  
 $z = [r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  et  $z' = [r', \theta'] = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$

$\bar{z} = [r, -\theta]$	$-z = [r, \pi + \theta]$	$kz = [kr, \theta], k > 0$	$kz = [-kr, \pi + \theta], k < 0$
$zz' = [r r', \theta + \theta']$	$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, -\theta\right]$	$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$	$z^n = [r^n, n\theta], n \in \mathbb{Z}$

### Forme exponentielle

Pour tout réel  $\theta$ , on note  $e^{i\theta}$  le nombre complexe  $\cos \theta + i \sin \theta$ .

$e^{i0} = 1$	$e^{i\pi} = -1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
--------------	-----------------	--------------------------	----------------------------

$ e^{i\theta}  = 1$	$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$	$e^{i\theta} = e^{-i\theta}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$
---------------------	-------------------------------------	------------------------------	------------------------------------

$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$
--	--	--	--



## Formule de Moivre

Pour tout réel  $\varphi$  et tout entier  $n$ , on a :  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

## Formule d'Euler

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

## Racines nièmes

Soit  $a$  un nombre complexe non nul et  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a = [r, \theta]$ .

L'équation  $z^n = a$  admet dans  $\mathbb{C}$ ,  $n$  solutions distinctes définies par  $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

### Conséquences :

Les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

### Théorème

Soit  $a$  un nombre complexe non nul d'argument  $\varphi$ . L'équation  $z^2 = a$  admet dans  $\mathbb{C}$  deux solutions opposées :

$$z_1 = \sqrt{|a|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{|a|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ces solutions sont appelées racines carrées du nombre complexe  $a$ .

### Théorème

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a, b$  et complexes et  $a$  non nul) admet deux solutions dans  $\mathbb{C}$  :

$$z_1 = \frac{-b + \sigma}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sigma}{2a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{et} \quad \sigma \text{ est une racine carrée de } \Delta$$

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$	$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$
---------------------------------------	----------------------------	-------------------------

**A retenir :** Soit  $z^2 = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $z = x + iy$  alors on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

### Théorème

Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes tels que  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 2$ .

Soit  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ .

Si  $z_0$  est un zéro de  $P$ , alors  $P(z) = (z - z_0)g(z)$ , où  $g(z)$  est de la forme  $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0$ , avec  $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$  complexes.

