EXERCICE N°1

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 2x$

1°) Soit h la fonction définie sur R par : h(x) = –2x – 1

a) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur R.

b) Démontrer qu'une fonction f = g + h est solution de (E_1) sur R si et seulement si g est solution de :(E_2) : $y' = 2y$ *sur R.*

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur R.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur R.

c)Déterminer la solution de (E_1) sur R vérifiant f(0) = 0.

EXERCICE N°2

Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$ *(E)*

1°) Démontrer que la fonction u définie sur R par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ *est une solution particulière de (E).*

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ *(E_0)*

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur R est solution de (E) si et seulement si v – u est solution de (E_0).

4°) En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).

5°) Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur -2e en 0.

EXERCICE N°3

On considère l'équation différentielle :(E) : $y' + 2y = \dfrac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

1°) Vérifier que la fonction f est une solution de (E) tel que pour tout x de R : $f(x) = e^{-2x}\ln\left(1 + 2e^{x}\right)$.

2°) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle :(E') : y' + 2y = 0.

3°) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

EXERCICE N°4

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^{x}$.

1°) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ *, où y désigne une fonction dérivable sur R.*

2°) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur R par :u(x) = (ax + b)e^x.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si u+ v est solution de (1)

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

EXERCICE N°5

Résolution de l'équation différentielle : $y' + y = e^{-x}$ *"*

EXERCICE N°6

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{2x}$ *(E).*

1°) Démontrer que la fonction u définie sur R par $u(x) = x\,e^{2x}$ *est une solution de (E).*

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ *(E_0).*

3°)Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ *est solution de (E) si et seulement si v −u est solution de (E_0).*

4°) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

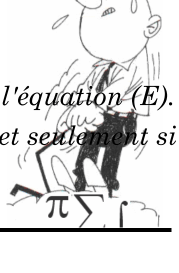
5°)Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°7

On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y + y = 2e^{-x}$ *(E)*

1°)Déterminer le réel λ *tel que la fonction y_0 définie sur R par* $y_0(x) = \lambda x^2 e^{-x}$ *soit solution de l'équation (E).*

2°)Démontrer que y, fonction numérique deux fois dérivable sur R, est solution sur R de (E) si et seulement si la fonction z définie par $z = y - y_0$ *est solution de l'équation différentielle (E_1) :* $z'' + 2z' + z = 0$



3°) Soit la fonction $t = z'+z$. Montrer que $t'+t = 0$

4°)Résoudre alors l'équation différentielle (E_1).

5°)En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

5°)Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans le repère $(O ;\vec{i}, \vec{j})$ passe par le point de coordonnées (-1,0)et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

EXERCICE N°8

On considère l'équation différentielle : $y'' - 5y' + 4y = 0$. (E)

1°) Soit la fonction $r = y'-4y$. Montrer que $r'-r = 0$

2°)Résoudre alors l'équation différentielle (E)

3°)Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = - 2x + 1$.

3°)On pose $u(x) = 2e^x - e^{4x}$.

Résoudre dans R l'inéquation $u(x) \geq 0$.

4°)On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leq x \leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est mesuré en unités de volume

Calculer la valeur exacte de V.

EXERCICE N°9

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température f(t) de la citerne vérifie l'équation différentielle $f' = a - bf$ avec $a = 2{,}088.10^{-2}$ et $b = 2{,}32.10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et f(t) en °C.

1°)a Montrer que y =f - 90 est solution de l'équation différentielle $y' = -by$ (1)

b. Donner la solution générale de (1)

c. En déduire l'expression de f(t) sachant que f(0)=20.

2°) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80°C ?

EXERCICE N°10

1°)Résoudre l'équation différentielle $4y''+49y = 0$.

2°)a) Déterminer la solution f vérifiant $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ et $f(\pi) = 1$.

b)Déterminer deux réels r et θ strictement positifs et $\varphi \in \left]-\pi,\pi\right[$ tels que $f(x) = r\cos(\theta x + \varphi)$

EXERCICE N°11

Partie A

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 4x$

1°) Soit et h la fonction définie sur R par : $h(x) = -2x - 1$

c) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur R.

d) Démontrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur R si et seulement si g est solution de : (E_2) : $y' = 2y$ sur R.

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur R.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur R.

3°) Déterminer la solution de (E_1) sur R vérifiant f(0) = 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique.

2°) Etudier les variations de f sur R et dresser son tableau de variation complet sur R.

(On ne demande pas le tracé de la courbe (C_f))

EXERCICE N°12

Partie A

Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$ (E)

1°) Démontrer que la fonction u définie sur R par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ (E_0)

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur R est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).

4°) En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).

5°) Déterminer la fonction v_0, solution de (E), qui prend la valeur -2e en 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = 2(2x - 1)e^{1-2x}$.

1°) Étudier les limites de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$ *et en déduire que la courbe* C_f *dans un repère orthonormal* $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ *admet une asymptote horizontale.*

2°) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.

3°) Justifier que l'équation $f(x) = -1$ *admet une unique solution* α *sur R et donner une valeur approchée de* α *à* 10^{-2}.

4°) Déterminer une équation de la tangente à C_f *au point d'abscisse 3/2.*

5°) Déterminer une équation de la tangente au point d'intersection de C_f *avec l'axe des abscisses.*

6°) Tracer la courbe C_f *et les tangentes déterminées précédemment.*

(unité : 2 cm sur chaque axe).

Partie C

Soit $y = g(x)$ *l'équation réduite de la tangente T à* C_f *au point d'abscisse a.*

On note $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

1°) a) Exprimer $\varphi'(x)$ *en fonction de* $f'(x)$ *et* $f'(a)$.

b) Montrer que : $\varphi''(x) = f''(x)$.

2°) Résoudre $f''(x) = 0$.

3°) Dans cette question, on pose : $a = 3/2$.

a) Déterminer les variations de φ' *et en déduire le signe de* $\varphi'(x)$.

b) Déterminer les variations de φ *et en déduire le signe de* $\varphi(x)$.

c) Déterminer la position de C_f *par rapport à sa tangente T.*

EXERCICE N°13

1°) Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_k(x) = x + \dfrac{1 - k e^x}{1 + k e^x}$.

a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k *est solution de l'équation différentielle :*

(E) : $2y' = (y - x)^2 + 1$.

b) En déduire le sens de variations de f_k *sur* $\mathbb{R}$.

2°)On note C_k *la courbe représentative de la fonction* f_k *dans un repère orthonormal* $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, *la droite D ' d'équation* $y = x + 1$ *et plusieurs courbes* C_k *correspondant à des valeurs particulières de k.*

Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C ' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).

3°) On remarque que, pour tout x réel, on a : $f_k(x) = x - 1 + \dfrac{2}{1 + k e^x}$ *(1) et* $f_k(x) = x + 1 - \dfrac{2 k e^x}{1 + k e^x}$ *(2).*

En déduire pour tout k strictement positif :

- la position de la courbe C_k *par rapport aux droites D et D '.*

- les asymptotes de la courbe C_k.