

Limite infinie en ∞

***Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$

*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie, pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $B > 0$ tel que si $(x \geq a \text{ et } x > B)$ alors

$$f(x) > A$$

*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie, pour tout nombre $A < 0$, il existe un nombre $B > 0$ tel que si $(x \geq a \text{ et } x > B)$ alors

$$f(x) < A$$

***Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, a]$

*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ signifie, pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $B < 0$ tel que si $(x \leq a \text{ et } x < B)$ alors

$$f(x) > A$$

*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ signifie, pour tout nombre $A < 0$, il existe un nombre $B < 0$ tel que si $(x \leq a \text{ et } x < B)$ alors

$$f(x) < A$$

Limite finie en ∞

***Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$

*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, signifie pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $B > 0$ tel que si $(x \geq a \text{ et } x > B)$ alors

$$|f(x) - \ell| < \beta$$

***Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, a]$

*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, signifie pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $B < 0$ tel que si $(x \leq a \text{ et } x < B)$ alors

$$|f(x) - \ell| < \beta$$

Limite finie en un réel.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel x_0 de I .

*) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, signifie, pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que si

$$(x \in I, \text{ et } |x - x_0| < a) \text{ alors } f(x) > A$$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, signifie, pour tout nombre $A < 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que si

$$(x \in I, \text{ et } |x - x_0| < a) \text{ alors } f(x) < A$$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, signifie, pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que si

$$(x \in I \text{ et } 0 < x - x_0 < a) \text{ alors } f(x) > A$$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, signifie, pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que si

$$(x \in I \text{ et } 0 < x_0 - x < a) \text{ alors } f(x) > A$$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, signifie, pour tout nombre $A < 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que si

$$(x \in I \text{ et } 0 < x - x_0 < a) \text{ alors } f(x) < A$$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, signifie, pour tout nombre $A < 0$, il existe un nombre $a > 0$ tel que si

$$(x \in I \text{ et } 0 < x_0 - x < a) \text{ alors } f(x) < A$$

Conséquences

*) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ alors il existe un réel $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$, $f(x) > 0$

*) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ alors il existe un réel $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$, $f(x) < 0$

*) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors il existe un réel $B < 0$ tel que, pour tout $x < B$, $f(x) > 0$

*) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ alors il existe un réel $B < 0$ tel que, pour tout $x < B$, $f(x) < 0$



Limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-a} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a-x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-a)^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-a)^{2n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-a)^{2n+1} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^{2n}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^{2n+1}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^{2n+1}} = -\infty$

LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré $a_n x^n$ et $b_m x^m$ respectivement alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x^4 + x - 1}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

Asymptotes

Asymptote horizontale

Si : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ alors la droite $\Delta : y = b$ est une asymptote à la courbe C

Asymptote verticale

Si : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ alors la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote à la courbe C

Asymptote oblique

Si : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ alors la droite $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C

