MATH AKIR

SEMAINE DES SUITES REELLES ORIGINAL (AKIR ALI)

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

♣ *Exercice n°01*

.*Soit n un entier naturel. On considère la fonction* f_n *définie sur R par* $f_n(x)=x^3+nx-1$

1. *Montrer que l'équation* $f_n(x)=0$ *admet dans l'intervalle* $]0,1]$ *une solution unique* U_n
2. *Calculer* U_0 *et Vérifier que pour tout n de N :* $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x$.
3. *En déduire que la suite* (U_n) *est décroissante puis qu'elle est convergente.*
4. *Vérifier que pour tout n de N* :* $\frac{U_1}{n}\leq U_n\leq\frac{1}{n}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}nU_n$
5. *Montrer que pour tout n de N :* $\frac{n}{n+1}\leq\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{n+3}{n+4}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$
6. *Soit pour tout n de N* :* $S_n=\frac{1}{n}(U_1+U_2+\ldots+U)_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k$.

a. *Montrer que* (S_n) *est décroissante.*

b. *Montrer que pour tout n de* N^* : $S_{2n} \leq \dfrac{S_n + U_n}{2}$

c. *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$