SEMAINE DES SUITES REELLES

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

Exercice n°06

I. *Soit la suite* (U_n) *définie sur* N^* *par :* $U_n = \dfrac{n}{a^n}$ *où a est un réel strictement supérieur* 2

1. *Vérifier que pour tout n de* N^* : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{2}{a}$. *En déduire que la suite* (U_n) *est décroissante.*
2. *Montrer que la suite* (U_n) *est convergente vers* 0
3. *Soit pour tout n de* N^* : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$. *Montrer que pour tout n de* N^* : $S_n \leq \dfrac{1}{a-2}$
4. *Montrer que pour tout n de* N^* : $S_{n+1} = \dfrac{1}{a} S_n + \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{(a-1)a^{n+1}}$
5. *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a}{(a-1)^2}$

II.*Soit la suite* (W_n) *définie sur* N^* *par :* $W_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k U_k$

1. *Montrer que la suite* (W_{2n}) *est strictement décroissante et la suite* (W_{2n+1}) *est strictement croissante.*
2. *Etablir que pour tout n de* N^* : $W_{2n+1} < W_{2n}$
3. *Montrer que les suites* (W_{2n}) *et* (W_{2n+1}) *sont convergentes vers le même limite* ℓ_a *tel que :* $\dfrac{-a^2+2a-3}{a^3} < \ell_a < \dfrac{-a+2}{a^2}$

Correction d'exercice n°06

1. $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, or $n \geq 1$ *alors* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq 2$ *donc* $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{2}{a}$

On a $U_n > 0$ *et* $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{2}{a} < 1$ *alors* $U_{n+1} \leq U_n$

2. *On a* $0 < U_{n+1} \leq \dfrac{2}{a} U_n$ *par itération* ou par récurrence on montre que $0 < U_n \leq \left(\dfrac{2}{a}\right)^{n-1} U_1$

Or $0 < \dfrac{2}{a} < 1$ *alors* $\lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{2}{a}\right)^{n-1} = 0$ *donc* $\lim\limits_{+\infty} U_n = 0$

3. $On\ a\ U_{n+1} \le \frac{2}{a}U_n\ alors\ \sum_{k=1}^{n} U_{k+1} \le \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{n} U_k \cdots\cdots > \left(\frac{a-2}{a}\right)S_n \le U_1 - U_n \le U_1 = \frac{1}{a}$

$alors\quad S_n \le \frac{1}{a-2}$

4. Vérifier que $U_{n+1} = \frac{1}{a}U_n + \frac{1}{a^{n+1}}\ alors\ \sum_{k=1}^{n} U_{k+1} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} U_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^{n+1}}$

$\cdots\cdots\ donc\ S_{n+1} = \frac{1}{a}S_n + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)a^{n+1}}$

5. Vérifier que (S_n) *est convergente puis par passage* à la limite :

$$\lim_{\infty} S_{n+1} = \lim_{\infty}\left[\frac{1}{a}S_n + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)a^{n+1}}\right] \to \ell = \frac{1}{a}\ell + \frac{1}{a-1} - 0 \to \ell = \frac{a}{(a-1)^2}$$

II.

1. $W_{2n+2} - W_{2n} = (-1)^{2n+1}U_{2n+1} - (-1)^{2n+2}U_{2n+2} = U_{2n+2} - U_{2n+1} \le 0\ alors\ (W_{2n})\ est\ \downarrow$

De même on montre que (W_{2n+1}) *est* $\uparrow$

2. $W_{2n+1} - W_{2n} = (-1)^{2n+1}U_{2n+1} \le 0$

3. $On\ a\ (W_{2n+1})\ est \uparrow\ et\ (W_{2n})\ est \downarrow,\ W_{2n+1} \le W_{2n}\ et\ \lim_{n\to+\infty}(W_{2n+1} - W_{2n}) = 0$

$alors\ (W_{2n+1})\ et\,(W_{2n})$ *sont adjacentes et convergentes vers* même limite ℓ_a.

On a $W_{2n+1} \le \ell_a \le W_{2n}\ alors\ W_3 \le \ell_a \le W_2\ donc\ \frac{-a^2+2a-3}{a^3} < \ell_a < \frac{-a+2}{a^2}$