

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I .

Limite en un réel

*) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ signifie, pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $(x \in I, \text{ et } |x - x_0| < \alpha)$ alors

$$|f(x) - \ell| < \beta$$

*) Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

*) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ signifie, pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $(x \in I \text{ et } 0 \leq x - x_0 < \alpha)$,

alors $|f(x) - \ell| < \beta$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ signifie, pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $(x \in I \text{ et } 0 \leq x_0 - x < \alpha)$

alors $|f(x) - \ell| < \beta$

*) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$

Opération sur les limites

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ alors :

$\lim_{x_0} f + g = \ell + \ell'$	$\lim_{x_0} kf = k\ell$	$\lim_{x_0} f = \ell $
$\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell} (\ell \neq 0)$	$\lim_{x_0} \frac{g}{f} = \frac{\ell'}{\ell} (\ell \neq 0)$	Si $f(x) \geq 0$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$
Si $f(x) \geq 0$ alors $\ell \geq 0$		Si $f(x) \leq 0$ alors $\ell \leq 0$

Continuité

*) f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

*) f est continue à droite de x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

*) f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

*) f est continue en x_0 si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0 .

*) Une fonction f est continue sur un intervalle I , si elle est définie sur cet intervalle et si : pour tout réel a de I
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

