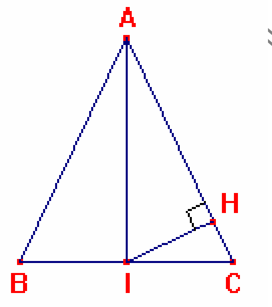
EXERCICE N°1

ABCD est un carré de côté a et m est un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [.
Les points A', B', C' et D' sont tels que $\overrightarrow{DA'} = m\ \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB'} = m\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = m\ \overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CD'} = m\ \overrightarrow{CD}$.
Démontrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré.

EXERCICE N°2

Soit ABC un triangle isocèle en A. On note I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).



1°) Démontrer que : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$

2°) Calculer : $\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

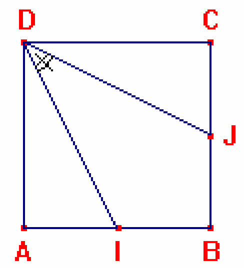
En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$

3°) A l'aide des résultats précédents, démontrer que $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{BH} = 0$

En déduire que si on note J le milieu de [IH], alors (AJ) est orthogonale à (BH).

EXERCICE N°3

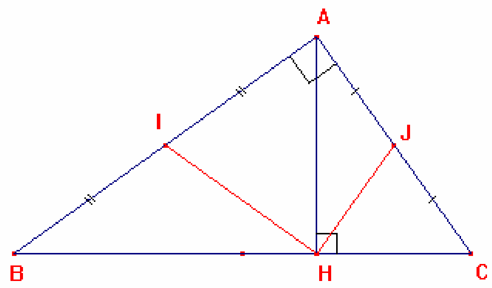
Soit un carré ABCD de côté a, on note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].



1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ *et* $\overrightarrow{DJ}$ *en fonction des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.
En déduire la valeur de $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}$ *en fonction de a.*
2°) Calculer les longueurs DI et DJ en fonction de a.
3°) Déduire des résultats précédents la valeur exacte de cos(IDJ)

EXERCICE N°4

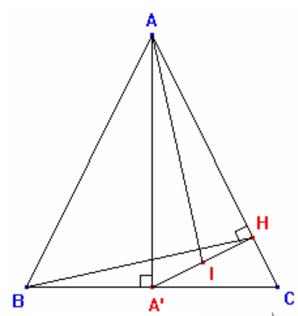
ABC est un triangle rectangle en A, le point H est le pied de la hauteur issue de A, le point I est le milieu de [AB], le point J est le milieu de [AC].



Prouver que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires .

EXERCICE N°5

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. On note A' le milieu de [BC], H le projeté de A' sur (AC) et et I le milieu de [A'H].



1°) Démontrer que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}$

2°) Démontrer que $\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{A'C}$

3°) Démontrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{BC}$

4°) Déduire des résultats précédents que (AI) et (BH) sont orthogonales.

EXERCICE N°6

ABCD est un carré de centre O, M est un point du segment [AB]. La perpendiculaire menée de A à la droite (DM) coupe [BC] en P.

1°)Montrer que AM = BP et que les droites (OM) et (OP) sont perpendiculaires.

2°)Montrer que, lorsque M décrit la droite (AB), le milieu I de [MP] reste sur la médiatrice de [OB].

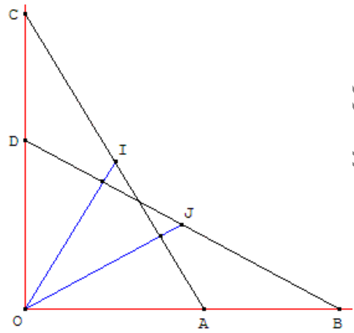
EXERCICE N°7

Soit A et B deux points sur la demi-droite (Ox).

Sur la demi-droite (Oy) on place les points C et D tels que OC = OB et OD = OA. Iest le milieu de [AC].

Montrer que la médiane (OI) du triangle OAC est la hauteur du triangle OBD.

De même la médiane (OJ) du triangle OBD est la hauteur du triangle OAC.



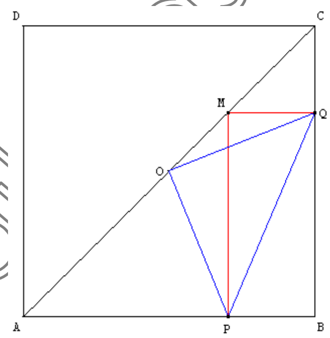
EXERCICE N°8

M est un point variable de la diagonale [AC] d'un carré distinct de A et C.

Il se projette en P et Q sur les côtés [AB] et [BC] du carré.

1°)Montrer que (DM) est perpendiculaire à (PQ).

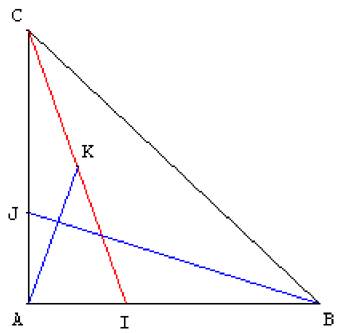
2°)Soit O est le milieu du carré, Montrer que OPQ est un triangle rectangle isocèle



EXERCICE N°9

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A. Soit I le point de [AB] tel que $AI = \frac{AB}{3}$ *; J le point de [AC] tels que* $AJ = \frac{AC}{3}$ *et K le milieu de [IC].*

Démontrer que les droites (AK) et (JB) sont perpendiculaires.



EXERCICE N°10

On considère un triangle ABC et Δ une droite passant par A.

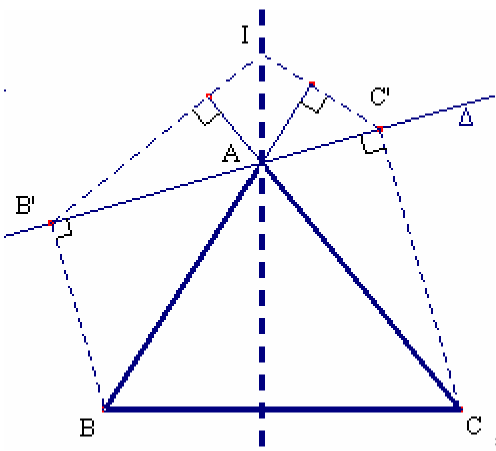
On désigne par B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur Δ et, par I le point d'intersection de la perpendiculaire menée de B' à (AC) et de la perpendiculaire à menée de C' à (AB).

1°) Démontrer que :

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}\ .$$

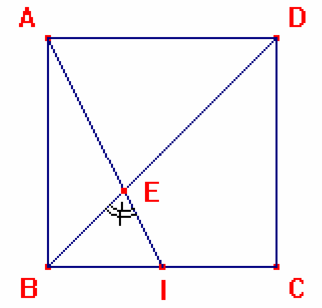
2°) En déduire que les droites (AI) et (BC) sont orthogonales.

3°) Quel résultat retrouve-t-on en choisissant Δ = (AB) ?



EXERCICE N°11

Soit ABCD un carré de côté a. On note I le milieu de [BC] et E le point d'intersection des droites (AI) et (BD).



1°) a) Calculer en fonction de a : AI et DB.

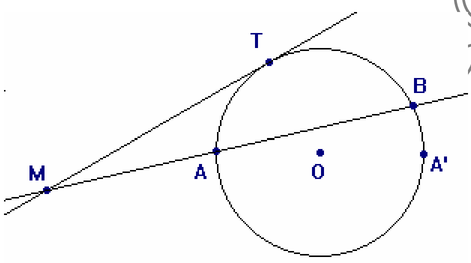
b) Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}$*,*

et en déduire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DB}$

2°) En déduire une valeur à 0,1° près de l'angle BEI

EXERCICE N°12

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R et M un point n'appartenant pas à cercle.
Une droite (D) passe par M et coupe le cercle (C) en deux points A et B.
On note A le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C).
Soit T un point du cercle (C) tel que la droite (MT) soit tangente au cercle (C).



1°) Démontrer que :

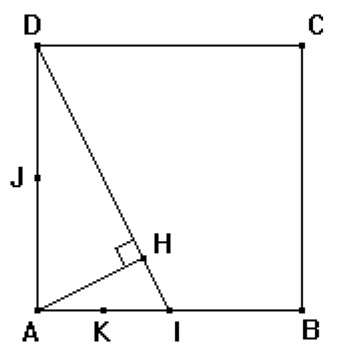
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = MO^2 - R^2$$

2°) En déduire que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MT^2$

EXERCICE N°13

Soit ABCD un carré de côté a. On note I, J et K les milieux des segments [AB], [AD] et [AI], puis H le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).
On se propose de démontrer, de deux façons différentes, que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

1°) ***1ère méthode.***



a) Montrer que : $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HI} = 2\,\overrightarrow{HK}$ *et que* $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD} = 2\,\overrightarrow{HJ}$ *.*

b) En déduire que $4\,\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{HJ} = HA^2 + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$*.*

c) Démontrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} = AH^2 + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HD}$

d) En déduire que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

2°) ***2ème méthode.***

On considère le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$*.*

a) Déterminer une équation de la droite (DI) et de la droite (AH).

b) En déduire les coordonnées du point H.

c) Vérifier que (JH) et (HK) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°14

Dans un plan P on considère un rectangle ABCD tel que AB=2BC=2.

Soit J le point du segment [CD] tel que CJ=$\frac{1}{2}$*. (BJ) coupe (AC) en I et coupe (AD) en K*

Partie I.

1°)a)Faire une figure illustrant les données ci-dessus

b)Vérifier que AC=$\sqrt{5}$*.*

2°)Calculer : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CJ}$

3°)En déduire que (BJ)$\perp$*(AC).*

4°a)Calculer la distance BJ .

b)Démontrer que BI=$\frac{2}{\sqrt{5}}$*.*

c)Calculer alors le produit scalaire : $\vec{BC}.\vec{BJ}$

5°)Démontrer que : $\vec{AK}.\vec{BC} = 4$.

Partie II.

On considère les ensembles suivants : $E = \{M, M \in P \text{ et } MA^2 + MB^2 = 6\}$ et $F = \{M, M \in P \text{ et } 3.MA^2 + MK^2 = 16\}$

1°)a)Vérifier que $C \in E$.

b)Déterminer alors l'ensemble E et le construire.

2°)a)Vérifier que $A \in F$.

b)Déterminer alors l'ensemble F et le construire.

EXERCICE N°15

ABCD est un rectangle de largeur $AD = a$ et de longueur $AB = a\sqrt{2}$.

E est le milieu de [AB].

Que peut-on dire des droites (AC) et (DE) ?

EXERCICE N°16

Les points I et J sont les milieux des côtés [BC] et [CD] d'un carré ABCD (où $AB = a$, $a > 0$). On note θ l'angle $\widehat{IAJ}$. Donner une valeur exacte de $\cos\theta$ à 0,01 prés.

EXERCICE N°17

Soit ABC un triangle : on pose : $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.

1°)Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Développer : $\left\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right\|^2$

2°)En déduire que : $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \dfrac{\cos\hat{A}}{a} + \dfrac{\cos\hat{B}}{b} + \dfrac{\cos\hat{C}}{c}$

EXERCICE N°18

1°)Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer que : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$

2°)En déduire alors , dans un triangle ABC , on a : $AB \leq AC + CB$

3°)Soit ABC est un triangle. On note par I , J et K les milieux respectifs de [BC] , [AC]et [AB].

Démontrer que : $AI + BJ + CK \leq AB + BC + CA$

EXERCICE N°19

Soit ABCD un rectangle du plan et M et N deux points quelconques de ce plan. Démontrer que l'on a la relation : $\vec{AM}.\vec{AN} + \vec{CM}.\vec{CN} = \vec{BM}.\vec{BN} + \vec{DM}.\vec{DN}$

EXERCICE N°20

On donne dans le plan (P) un triangle ABC tel que $BC = 8$, $AB = 6$ et $\widehat{ABC} = \dfrac{2\pi}{3}$ (rad).

Soit f l'application du plan (P) dans R définie par : $f(M) = \vec{BC}.\vec{AM}$.

On désigne par ζ_a l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = a$. où a est un réel.

1°)Déterminer ζ_0.

2°)Calculer f(B) et f(C).

3°)Déterminer le réel a tel que ζ_a soit la médiatrice de [BC].

EXERCICE N°21

On considère, dans le plan (P) , un triangle AOB rectangle en O. On note M un point quelconque de (P).

1°)Montrer que : $MA^2 + MB^2 - 2MO^2 = AB^2 + 4\,\vec{MO}.\vec{OI}$ où I est le milieu de [AB].

2°)Déterminer l'ensemble Δ , des points M de (P) tels que l'on ait : $MA^2 + MB^2 - 2\,MO^2 = \dfrac{AB^2}{2}$.

EXERCICE N°22

On donne, dans un plan (P), un triangle ABC rectangle en A et isocèle et on a : $AB = AC = 5$.

1°)Déterminer le barycentre G du système (A,-1) , (B,1) , (C,1).

2°) Montrer que : $MB^2 + MC^2 - MA^2 = MG^2$

3°)Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan (P) tels que $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 25$.

4°)Déterminer l'ensemble (Δ) des points N du plan (P) tels que : $\left\| \vec{NA} + \vec{NC} - \vec{NA} \right\| = NO$ où O est le milieu de [BC].

EXERCICE N°23

Soit ABC un triangle.

1°)Démontrer que , pour tout M du plan, on a : $\vec{MA}.\vec{BC} + \vec{MB}.\vec{CA} + \vec{MC}.\vec{AB} = 0$

2°)Déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

EXERCICE N°24

Soit ABCD est un quadrilatère .

1°)Démontrer que : $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 + 2\vec{AC}.\vec{DB}$

2°)En déduire que les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires si et seulement si $AB^2+CD^2 = AD^2 + BC^2$

3°)I et J sont les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

a- Démontrer $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

b- En déduire que le quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

EXERCICE N°25

Soit un triangle ABC.

1°)Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\vec{AB}.\vec{AM} = \vec{AC}.\vec{AM}$

2°) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $\vec{AB}.\vec{AM} = -\vec{AC}.\vec{AM}$

EXERCICE N°26

Etant donné un parallélogramme ABCD, on abaisse du sommet C les perpendiculaires (CE) et (CF) sur le coté (AB) et sur le diagonale (BD).

Démontrer que l'on a : $\overline{BD}.\overline{BF} = BC^2 + \overline{BA}.\overline{BE}$.

EXERCICE N°27

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°)On considère la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$, et le point $A(x_0,y_0)$.

On note H la projection orthogonale de A sur (D) et $\vec{n}$ le vecteur normale de (D).Calculer $\vec{n}.\vec{HA}$ de deux façons et rn déduire la valeur de la distance AH de A à la droite (D) en fonction de a , b , c , x_0 et y_0 .

2°)Application.

On considère les trois points A(2,0) , B(4,1) , C(1,2).

a) Former les équations des trois cotes du triangle ABC.
b) Former les équations des trois bissectrices intérieures de ce triangle et calculer les cordonnées du centre, I , du cercle inscrit.