Définition

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs et les point O , M , N tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *le réel noté* $\vec{u}.\vec{v}$ *et défini comme suit :*

♦*Si* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$.

♦*Si* $\vec{u}\neq\vec{0}$ *et* $\vec{v}\neq\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(A\hat{O}B\right)$

Conséquence

1°) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ *où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).*

2°) $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

3°) $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

4) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

5°)Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ *une base orthonormé. Pour tous vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs et a et b deux réels.*

$\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$	$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$	$(a\vec{u}).(b\vec{v})=ab(\vec{u}.\vec{v})$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$		$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$		$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Cercle

Le cercle de diamètre [AB] est égal à l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Applications

L'aire de ABC est égale :

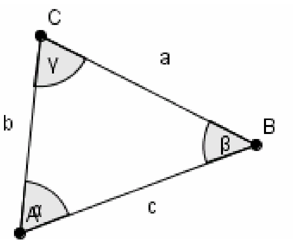
$S=\dfrac{ab}{2}\sin\beta=\dfrac{bc}{2}\sin\alpha=\dfrac{ab}{2}\sin\gamma$

Formule d'Al-Kashi

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$
$c^2=a^2+c^2-2ac\cos\gamma$

Formule de sinus

$\dfrac{2S}{abc}=\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}=\dfrac{\sin\gamma}{c}$



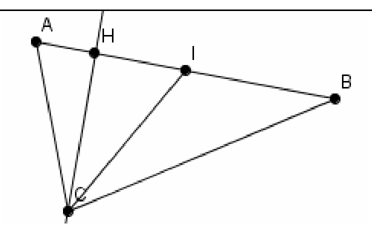
Théorème de médiane

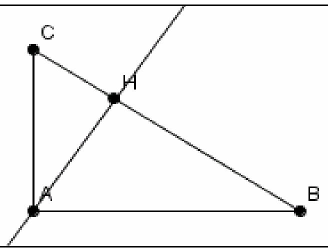
*I =A*B et H est le projeté orthogonal de C sur (AB) :*

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CI^2-\dfrac{1}{4}AB^2$

$CA^2+CB^2=2CI^2+\dfrac{AB^2}{2}$

$CA^2-CB^2=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$



Soit ABC triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. On a alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $AH \times BC = AB \times AC$ $AH^2 = HB \times HC$ $AB^2 = AH \times AC$ $AC^2 = CH \times CB$	

Distance d'un point à une droite : $d(A(x_0, y_0), \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$