

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$ ou encore

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Le réel ℓ , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il noté $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une tangente T d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + a^2 + ax)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + a^2 + ax) = 3a^2$$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a) = 3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $]a-h, a[$ ($h > 0$)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell'$ ou

$$\text{encore } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell'$$

Le réel ℓ' , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il noté $f'_g(a)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $[a, a+h[$ ($h > 0$)

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un nombre réel ℓ'' tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell''$ ou

$$\text{encore } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell''$$

Le réel ℓ'' , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il noté $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a) = f'_d(a)$ nombre fini

2°) Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente T_d d'équation : $T_d : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ et $x \geq a$

3°) Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente T_g d'équation : $T_g : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ et $x \leq a$

Interprétation graphiques : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ ou encore $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$

Si :	Interprétation graphique :
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	C_f admet en point $M(a, f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = a$ et $y \geq f(a)$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	alors C_f admet en point $M(a, f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : $x = a$ et $y \leq f(a)$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse $x = 0$ et interpréter le résultat tel que : $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



alors la courbe alors C_f admet en point $M(0,0)$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = 0$ et $y \geq 0$

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

Si f est dérivable en a , alors : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

On dit que $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h voisin de zéro.

Exemple :

Trouver une valeur approchée de $(3.98)^3$

Soit $f : x \mapsto x^3$, $a = 4$ et $h = -0.02$ alors $f(4-0.02) \approx f(4) - \frac{2f'(4)}{100}$ alors $(3.98)^3 \approx 63,04$

(le calculatrice donne : 63,044792)

Les nombres dérivés de fonctions usuelles

f	$f'(a)$
$f : x \mapsto \beta$	$f'(a) = 0, a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \alpha x + \beta$	$f'(a) = \alpha, a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto (x-a)^2 + \beta$	$f'(a) = 2(a-a) a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{\alpha x + \beta}$	$f'(a) = -\frac{\alpha}{(\alpha a + \beta)^2}, a \neq -\frac{\beta}{\alpha}$
$f : x \mapsto \sqrt{x+a}$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a+a}}, a > -a$
$f : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\lambda x + \gamma}$	$f'(a) = \frac{\alpha\gamma - \lambda\beta}{(\lambda x + \gamma)^2}, a \neq -\frac{\gamma}{\lambda}$

Opérations sur les fonctions dérivables en a

Soit f et g deux fonctions dérivables en a :

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$
$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
$(f^k)'(a) = kf'(a)f^{k-1}(a), k \in \mathbb{N}^*$
$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}, f(a) \neq 0$
$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{(f(a))^2}, f(a) \neq 0$
$(\sqrt{f})'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}, f(a) > 0$

