Fiche de cours — $3^{ème}$ sciences
SUITES REELLES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Soit (u_n) une suite réelle définie pour tout entier $n \geq n_0$

Raisonnement par récurrence

Soit à démontrer : pour tout entier naturel $n \geq n_0$ $\wp(n)$ où $\wp$ est une propriété dépendant de l'entier naturel n.
La démonstration par récurrence consiste à :
1°)Vérifier que la propriété est vraie pour la valeur n_0 : c'est l'initialisation de la récurrence et
2°)puis vérifier que si La propriété est vraie pour un certain n (fixé quelconque), alors la propriété est vraie au rang (n+1) (la propriété est dite héréditaire)
Alors , on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\wp(n)$ est vraie.

Variation d'une suite .

**)La suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.*
**)La suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.*
**)La suite (u_n) est dite monotone lorsqu 'elle est soit croissante soit décroissante.*

Méthode

1°)Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

2°)Pour une suites à termes positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 .

3)Dans le cas où $u_n = f(n)$ avec f une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$.
Si f est croissante sur $[n_0,+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $[n_0,+\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Attention : le réciproque est fausse.

Suite majorée, minorée et bornée.

**)La suite (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq M$*
**)La suite (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq m$*
**)La suite (u_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.*

Suite convergente- diverge

**)On dit que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$*

**)Si (u_n) converge vers ℓ alors ce réel est unique.*
Notation : (u_n) converge vers ℓ, in écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

**)Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$ alors il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \neq 0$*

**)Une suite qui ne converge pas est dite divergence.*
**) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie, si pour tout A >0, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n > A$*
**) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ signifie, si pour tout A <0, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n < A$*

Limite d'une suite définie par $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur $]a,+\infty[$, soit $\ell \in R \cup \{+\infty,-\infty\}$
**)Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$*

Opérations sur les limites

**)Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + bv_n) = a\ell + b\ell'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$*

**) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$*

**)Soit une suite réelle $(u_n)_{n\geq n_0}$ telle que $u_n > 0$:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

*) Soit une suite réelle $(u_n)_{n\geq n_0}$ telle que $u_n < 0$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

Théorème d'encadrement

*)Si $\begin{cases} \exists p \in N / n \geq p : |u_n| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

*)Si $\begin{cases} \exists p \in N / n \geq p : u_n \geq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

*)Si $\begin{cases} \exists p \in N / n \geq p : u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

*)Si $\begin{cases} \exists p \in N / n \geq p : v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$

Suite arithmétique – Suite géométrique

*** Suite arithmétique(s.a)***	*** Suite géométrique(s.g)***
$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = qv_n$
$u_n = u_0 + nr$	$v_n = v_0 q^n$
$u_p = u_s + (p-s)r$	$v_p = v_s q^{p-s}$
$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \Rightarrow$ u non s.a	$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0} \Rightarrow$ v non s.g
$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & si\ -1 < q < 1 \\ 1 & si\ q = 1 \\ +\infty & si\ q > 1 \\ n'existe\ pas & si\ q \leq -1 \end{cases}$
• $\sum\limits_{k=0}^{n} x = \overbrace{x + x + \ldots + x}^{n+1\ fois\ x} = (n+1)x$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ • $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$	pour tout $q \in R^* - \{1\}$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ • $\sum\limits_{k=p}^{n} q^k = q^p + q^{p+1} + \ldots + q^n = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$