EXERCICE N°1

Soit ABCD un carrée direct, les triangles ABA' et DCC' sont équilatéraux et à l'extérieur du carré.
Les triangles ADD' et BCB' sont équilatéraux et à l'intérieur du carré.

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1°)Déterminer les images des points A' et D' par R et les images des points B et D par R'.
2°)Montrer que $A'D'=B'C'$ et que $\left(\overrightarrow{A'D'},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv 0[2\pi]$
3°)En déduire que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme .
4°)Prouver que $A'B'C'D'$ est un losange.

EXERCICE N°2

On considère un triangle direct ABC et H son orthocentre. Soit S la symétrie centrale de centre A. R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et R' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1°)Construire les points $D = R(B)$, $E = R'(C)$ et $F = S(E)$.
2°)Montrer que $R(C) = F$ et que $(BC) \perp (DF)$.
3°)Que représente (AH) pour le triangle AED.

EXERCICE N°3

Soit un triangle ABC non isocèle et tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On place sur la demi-droite $[BA)$ un point P distinct de B et on considère le point Q de la demi-droite $[CA)$ tel que $CQ = BP$.

1°)Construire le centre O de rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme B en C.
2°)Montrer que $r(P) = Q$; quelle est la nature du triangle OPQ.
3°)Construire les points P et Q sachant que $BP = CQ = PQ$.

EXERCICE N°4

Soit un carré ABCD de sens direct et O son centre . On considère un point I de $[AD]$ et un point J de $[AB]$ tels que AI=BJ. Les droites (BI) et (DJ) se coupent en H.
1°)Démontrer que : $r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(I) = J$.

2°)a-Montrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires .
b-Montrer que H est l'orthocentre du triangle CIJ.

EXERCICE N°5

ABCD est un carré direct de centre O. Soit r la rotation de centre O qui transforme A en B.
1°)Déterminer l'angle de r.
2°)Trouver l'image de point B par r .
3°)Soient E et F deux points situés respectivement dur les demi droites $[AB)$ et $[BC)$ et tels que $AE = BF$.
Déterminer l'image de point E par r .
4°)Les droites (AF) et (EC) se coupe en H. Que représente H pour le triangle DEF.

EXERCICE N°6

Soit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois droites strictement parallèles.
Construire un triangle équilatérale direct ABC tel que $A \in \Delta_1$, $B \in \Delta_2$ et $C \in \Delta_3$

EXERCICE N°7

Deux cercles isométriques ζ et ζ' de centre respectifs O et O' se coupent en A et B.
Soit r la rotation de centre A et telle que r(O) = O'. Soit M un point de ζ et M' son image par r.
Montrer que les points B , M et M' sont alignés.

EXERCICE N°8

Soit ABCD un carré direct et M un point du segment [BD] distinct de B et D. On désigne par Pet Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AD).
1°)Soit I le centre du rectangle APMQ; quel est l'ensemble des points I lorsque M décrit [BD].

2°)Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et telle que r(A) = B. Déterminer son centre ω .

En déduire que la médiatrice de [PQ] passe par ω.

EXERCICE N°9

On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $AB \neq AD$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit E le point telle que CED soit un triangle équilatéral direct.

1°)Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(A)=E$ et $r(B)=D$. Préciser son angle θ et construire son centre I.

2°)La droite (EC) coupe la droite (AB) en F.

- *a- Montrer que $D \in [AE]$ et que le triangle AFE est équilatéral direct et que $r(F)=A$.*
- *b- En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.*

3°)Soit r' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Trouver $r'(D)$et $r'(F)$ et en déduire que les droites (FD) et (BE) se coupe en un point J et que $(\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

4°)Soit ζ le cercle de centre ω circonscrit au triangle ABD.

- *a- Montrer que ζ passe par I et J.*
- *b- Montrer que les points I , O et ω sont alignés.*

EXERCICE N°10

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle est isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$;

$I = B*C$; Δ la droite passant par C et perpendiculaire à (BC) et $K = \Delta \cap (AB)$.

1°)Faire une figure .

2°)Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- *a- Déterminer $r(B)$, $r((AC))$ et $r((BC))$.*
- *b- Déduire $r(C)$ et $r(I)$*

2°)Soit le cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

- *a- Déterminer $\zeta' = r(\zeta)$ puis $\zeta \cap \zeta'$*
- *b- Soit M un point du plan tel que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ et $M' = r(M)$. Sur que ensemble varie le point M' lorsque M varie ?*
- *c- Montrer que $(BM) \perp (CM')$ et que $IM = JM'$ avec $J = r(I)$*

EXERCICE N°11

Soit $\wp$ un plan orienté et $\Re = (O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé de $\wp$.

Parie I.

Soit un point $M(x,y)$ et son image $M'(x',y')$par la rotation r de centre $\omega(a,b)$ et d'angle α.

On pose $\ell = \omega M$ et $(\vec{i},\overrightarrow{\omega M}) \equiv \beta[2\pi]$.

1°)Montrer que : $x - a = \ell \cos\beta$ et $y - b = \ell \sin\beta$.

2°)Montrer que : $x' - a = \ell \cos(\alpha+\beta)$et $y' - b = \ell \sin(\alpha+\beta)$.

3°)En déduire que : $M'(x',y') = r_{(\omega(a,b),\alpha)}(M(x,y)) \Rightarrow \begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$

Partie II.

On pose pour tout n de N ; $R_n = r_{\left(O,\frac{\pi}{2^n}\right)}$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2^n}$.

Soit $M_0(a_0,b_0)$ et pour tout n de N : $M_n(a_n,b_n) = R_n(M_{n-1}(a_{n-1},b_{n-1}))$*

1°)Montrer que pour tout n de N : $M_n = r_{\left(O;\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)}(M_0)$.

2°)En déduire alors a_n et b_n en fonction de n et a_0 et b_0.

3°)Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n$