Définition :

n et p étant deux entiers naturels non nuls.
Une matrice d'ordre $n\times p$ est un tableau de nombres réels formé de b lignes et de p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients ou termes de ma matrice.

Notation

Soit M une matrice d'ordre $n\times p$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne est noté a_{ij} .

Toute matrice M de coefficients a_{ij} avec i et j des entiers vérifiant : $1\le i\le n$ et $1\le j\le p$ est noté $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et représentée comme ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & .. & a_{1p} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & & & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note par O la matrice nulle. $O=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & .. & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

On note par I_n la matrice unité d' ordre n (c'est-à-dire d'ordre $n\times n$), $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Définition et Propriétés

Soit $A=\left(a_{ij}\right)$ et $B=\left(b_{ij}\right)$ deux matrices de même ordre $n\times p$ et k un réel.

**)La somme des deux matrices A et B , notée A + B , est la matrice $C=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$ de même ordre $n\times p$.*

**)La différence des deux matrices A et B , notée A - B , est la matrice $D=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)$ de même ordre $n\times p$.*

**)Deux matrices sont égales si et seulement si, elles sont de même ordre et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.*

*) $A+O=O+A=A$
*) $A+B=B+A$
*) $(A+B)+C=A+(B+C)$
*) $kA=\left(ka_{ij}\right)$
*) $-A=\left(-a_{ij}\right)$ *est la matrice opposée de A.*
*) $k(A+B)=kA+kB$

Produit de deux matrices

Soit $A=\left(a_{ij}\right)$ une matrice d'ordre $n\times p$ et $B=\left(b_{kj}\right)$ une matrice d'ordre $p\times q$. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice , notée $A\times B=\left(c_{ij}\right)$ d'ordre $n\times q$, définies par $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$

*) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ *(on suppose que le produit est possible)*
*) $A\times(B+C)=A\times B=A\times C$ *(on suppose que le produit est possible)*
)Pour tout matrice carrée M d'ordre 2 on a : $M\times I_2=I_2\times M=M$
)Pour tout matrice carrée N d'ordre 3 on a : $N\times I_3=I_3\times N=N$

http://maths-akir.midiblogs.com/

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0+2\times 1-1\times 4 & 1\times 3+2\times 1-1\times 2 \\ 2\times 0+0\times 1+1\times 4 & 2\times 3+0\times 1+1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice

Soit $M = (a_{ij})$ *une matrice d'ordre n.*

**)On dit que M est inversible si et seulement si s'il existe une matrice M' de même ordre n vérifiant* $M \times M' = I_n$

M' est appelée dans ce cas l'inverse de M, noté M^{-1}

**)Si M est inversible alors sa matrice inverse et unique.*

Déterminant et système

Soit M une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.

**)M est inversible si et seulement si ,* $det(M) \neq 0$

**)Si M est inversible alors tout système, d'écriture matricielle,* $A \times X = B$ *, a une solution et une seule et l'on a* $X = A^{-1} \times B$

**)Si M est non inversible alors le système* $A \times X = B$ *n'a pas de solution ou a une infinités de solutions.*

Matrice d'ordre 2	***Matrice d'ordre 3***
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
Déterminant $dét(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	*Déterminant* $dét(N) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
Inverse de M (on suppose que $det(M) \neq 0$ *)* $M^{-1} = \frac{1}{det(M)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$	*Inverse de N(on suppose que* $det(N) \neq 0$ *)*

Système de Cramer

Définition :

On appelle système de Cramer tout système linéaire de n équations à n inconnues (n = 2 ou 3) : $M \times X = K$ *tel que* $det(M) \neq 0$.

Théorème

Tout système de Cramer d'ordre 3 à une unique solution (x_1, x_2, x_3) *donnée par* $x_i = \frac{det(M_i)}{det(M)}$ *où* M_i *est la matrice obtenue en remplaçant la* $i^{ème}$ *colonne de la matrice M par celle des constantes.*

Exemple : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$

On a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $K = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *on a* $det(M) = -5 \neq 0$ *alors*

$$x = \frac{det(M_1)}{det(M)} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = 1$$

$$y = \frac{det(M_2)}{det(M)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = 2 \quad et \quad z = \frac{det(M_3)}{det(M)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-4} = 3$$

http://maths-akir.midiblogs.com/