

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un réel de  $I$ .

### Continuité en un réel.

#### Définition :

On dit que la fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si pour tout nombre  $\beta > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que si ( $x \in I$ , et  $|x - x_0| < \alpha$ ) alors  $|f(x) - f(x_0)| < \beta$

#### Conséquences

- \*) Toutes fonction constante est continue en tout réel  $x_0$ .
- \*) La fonction affine est continue en tout réel  $x_0$ .
- \*) Toute fonction polynôme est continue en tout réel  $x_0$ .
- \*) Toute fonction rationnelle est continue en tout réel  $x_0$  de domaine de définition.
- \*) La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue en tout réel positif  $x_0$ .
- \*) Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $|f|$  est continue  $x_0$ .
- \*)  $f$  une fonction positive sur  $I$ .

Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $\sqrt{f}$  est continue  $x_0$ .

#### Opération sur les fonctions continues

Soit  $f$  et  $g$  deux fonction définies sur un intervalle  $I$

- \*) Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  alors les fonction  $f+g$ ,  $fg$  et  $kf$  sont continues en  $x_0$ .
- \*) Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  et si  $g(x_0) \neq 0$  alors les fonction  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues en  $x_0$ .

#### Continuité à droites – Continuité à gauche.

- \*) On dit que la fonction  $f$  est continue à droite en  $x_0$  si, pour tout nombre  $\beta > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que si ( $x \in I$  et  $0 \leq x - x_0 < \alpha$ ) alors  $|f(x) - f(x_0)| < \beta$
- \*) On dit que la fonction  $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si, pour tout nombre  $\beta > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que si ( $x \in I$  et  $0 \leq x_0 - x < \alpha$ ) alors  $|f(x) - f(x_0)| < \beta$
- \*)  $f$  est continue en  $x_0$ , si et seulement si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$ .
- \*)  $f$  une fonction positive sur  $I$ .

Si  $f$  est continue à droite en  $x_0$ , alors  $\sqrt{f}$  est continue à droite  $x_0$ .

Si  $f$  est continue à gauche en  $x_0$ , alors  $\sqrt{f}$  est continue à gauche  $x_0$ .

#### Continuité sur un intervalle.

- \*) Une fonction définie sur un intervalle  $]a, b[$  est dite continue sur  $]a, b[$  si elle est continue en tout réel de  $]a, b[$ .
- \*) Une fonction définie sur un intervalle  $[a, b[$  est dite continue sur  $[a, b[$  si elle est continue  $]a, b[$  et continue à gauche de  $b$ .
- \*) Une fonction définie sur un intervalle  $]a, b]$  est dite continue sur  $]a, b]$  si elle est continue  $]a, b[$  et continue à droite de  $a$ .
- \*) Une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$  est dite continue sur  $[a, b]$  si elle est continue  $]a, b[$  et continue à droite de  $a$  et à gauche de  $b$ .

- \*) Toute fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$
- \*) Toute fonction rationnelle est continue sur sa domaine de définition.

Image d'un intervalle

- \*) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

#### Théorème de la valeur intermédiaire

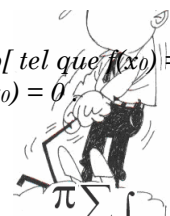
Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , alors pour tout réel  $c$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = c$  admet aux moins une solution  $\alpha \in [a, b]$ .

#### Corollaire 1

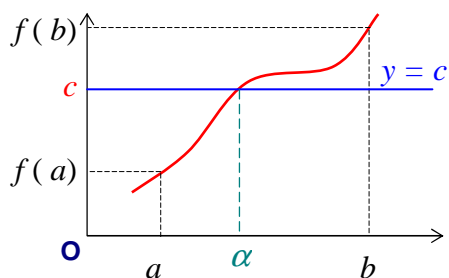
Si  $f$  est continue sur  $I = [a, b]$  et telle que  $f(a) \times f(b) < 0$  alors il existe au moins un réel  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) = 0$ .  
Et si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors il existe un unique réel  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

#### Corollaire 2

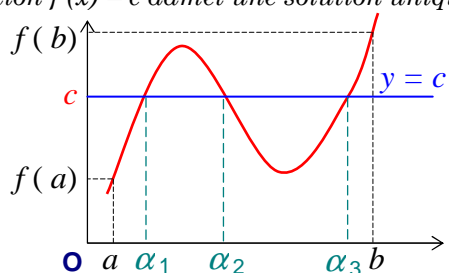
Si  $f$  est continue sur  $I = [a, b]$  et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur  $I$



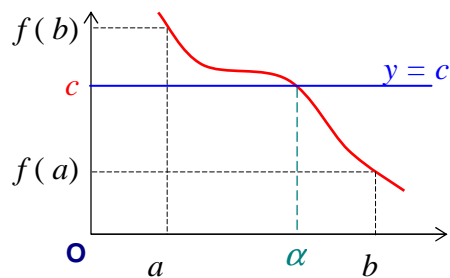
## Illustrations graphiques



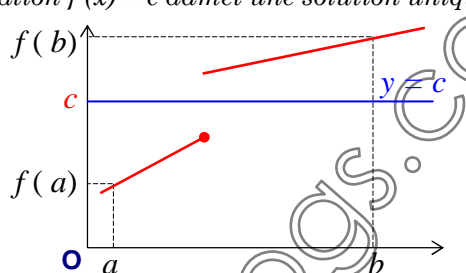
$f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[a ; b]$ .  
L'équation  $f(x) = c$  admet une solution unique.



$f$  est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle  $[a ; b]$ .  
L'équation  $f(x) = c$  peut avoir plusieurs solutions



$f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[a ; b]$ .  
L'équation  $f(x) = c$  admet une solution unique.



$f$  n'est pas continue sur l'intervalle  $[a ; b]$ .  
L'équation  $f(x) = c$  peut ne pas avoir de solutions.

<http://maths-akir.midiqds.com/>

