Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les propriétés suivantes :
(*) la fonction f est une bijection de I sur f(I)
(*)La fonction f^{-1} est une bijection de f(I) sur I et on a : $(x\in I\ ,\ y=f(x)) \Leftrightarrow (y\in f(I)\ ,\ x=f^{-1}(y))$
(*)La fonction f^{-1} est strictement monotone sur f(I) et a la même sens de variations que f .
(*) Les courbes représentatives de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (y = x)
Si est du plus f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur f(I)
Si est du plus f est dérivable sur I et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de I alors : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ *pour tout x de f(I)*

***Exemple** :Soit* $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $I=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *sur un intervalle J qu'on précisera.*

Correction

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

On a $\forall x\in I\ :f'(x)=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}<0$ *alors f est strictement décroissante et continue sur I alors f réalise une bijection de I sur J = f(I) =* $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to(-0,5)^+} f(x)\right[=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

Pour tout $x\in J$: $y=f^{-1}(x)$ équivaut à $x=f(y)$ et $y\in I$

équivaut à $x=\dfrac{y+1}{2y+1}$ *et $y\in$ I équivaut à : $2xy+x=y+1$ et $y\in$ I équivaut à* $y=\dfrac{1-x}{2x-1}$ *et $y\in$ I*

alors pour tout x de J : $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{2x-1}$

Théorème

La fonction réciproque de la fonction f définie sur R_+ par : $f(x)=x^n$ ($n\geq 2$) est appelée fonction racine $n^{ième}$.
Pour toit x de R_+, le réel $f^{-1}(x)$ est noté $\sqrt[n]{x}$.(lire racine $n^{ième}$ de x)

$f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

(*) f^{-1} est définie , continue et strictement croissante sur R_+ . elle est bijective de R_+ sur R_+

(*)Pour tout réel x de R_+, on a : $\sqrt[n]{x^n}=x$ *et* $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

(*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

(*) $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ *est dérivable sur R_+ est sa fonction dérivée est :* $x\mapsto\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$

***Exemple :** Soit* $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$

1°)Montrer que f est continue sur l'intervalle $I=[2,+\infty[$

2°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3°)Montrer que est strictement croissante sur I .

Correction :

1°)La fonction : $g:x\mapsto x-2$ est continue et positif sur I

La fonction : $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ est continue sur $R_+\supset g(I)$

Alors la fonction f est continue sur I car f est comme composée de fonction continues.

2°)on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ *et on a :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$ *donc d'apres le théoreme sur la limite d'une fonction composée on a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3°)Soit a et b deux élément de I tel que $a<b$.

On a : $a<b \Rightarrow a-2<b-2 \Rightarrow \sqrt[3]{a-2}<\sqrt[3]{b-2} \Rightarrow f(a)<f(b)$.Alors est strictement croissante sur I .