EXERCICE N°1

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *de l'espace et les droites* D_1 *et* D_2 *définies par :*

$$D_1 : \begin{cases} x = -1 + 3a \\ y = 1 - a \\ z = 2 + a \end{cases} \text{ où } a \in R \text{ et } D_2 : \begin{cases} x = 1 - 2b \\ y = 2 - b \\ z = 2b \end{cases} \text{ où } b \in R .$$

1°/Montrer que D_1 *et* D_2 *sont sécantes et calculer les cordonnées de leurs point d'intersection I .*
2°/Soit le point A(0,1,2).
a)Ecrire une équation cartésienne du plan P_1 *contenant la droite* D_1 *et passant par A.*
b) Ecrire une équation cartésienne du plan P_2 *contenant la droite* D_2 *et passant par A.*
c)Quelle est l'intersection des plans P_1 *et* P_2 *? Donner une représentation paramétrique de cette intersection.*

EXERCICE N°2

L'espace est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Soient les droites :*

$$D : \begin{cases} x = -1 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = 3 + k \end{cases} \text{ où } k \in R \text{ et } D' : \begin{cases} x = 2 - 3k' \\ y = 1 + k' \\ z = -2k' \end{cases} \text{ où } k' \in R .$$

1°/ Montrer que D et D' ne sont pas coplanaires .
2°/Soit un réel m et les points M et M' appartenant respectivement à D et D' et obtenus en prenant k=k'=m
Montrer que la droite (MM') reste parallèle à un plan fixe lorsque m varie.

EXERCICE N°3

L'espace est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *A tout réel m , on associe le plan* P_m *dont une équation cartésienne est :* $2mx + (m+1)y - 3(m-1)z + 2m+4=0$.
1°/Pour quelle valeur de m , le plan P_m *passe-t-il par le point A(1,1,2) ?*
2°/Peut-on trouver m pour que le plan P_m *passe par le point B(-1,-3,-1) ?*
3°/ Pour quelle valeur de m , le vecteur $\vec{AB}$ *est-il directeur de* P_m *?.*

EXERCICE N°4

L'espace est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *On considère les plans* P_m *d'équations :*
$(2m+1)x-2y+(m+1)z-3m+4=0$. $(m \in R)$
1°/Montrer que tous les plans P_m *contiennent une droite* Δ *dont-on donnera une représentation paramétrique.*
2°/On considère les droites Δ_1 *et* Δ_2 *définies par :*

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 - 2a \\ y = 3 + a \\ z = 1 + 4a \end{cases} \text{ où } a \in R \text{ et } \Delta_2 : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

1°/Montrer que Δ_1 *et* Δ_2 *sont sécantes en un point I de* P_0.
b)Ecrire une équation cartésienne du plan Q contenant Δ_1 *et* Δ_2.
c) Soit $O'=S_I(O)$ *, écrire une équation cartésienne du plan P' passant par O' et parallèle à* P_0.

d)On pose $D=P' \cap Q$ *. donner une représentation paramétrique de D.*

3°/a)Existe-t-il un plan P_m *passant par le point* $A(\frac{1}{2}, 0, 2)$ *?*

*b)On désigne par **E** l'ensemble des plans* P_m *et par **F** l'ensemble des plans contenant* Δ *. **E** est-il égal à **F** ?*

EXERCICE N°5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *un repère cartésien de l'espace .*
A tout couple de réels (a , m) on associe la droite Δ_a *et le plan* P_m *définies par :*

$$\Delta_a : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - z - a = 0 \end{cases} \text{ et } P_m : (m+1)x-(m-1)y+(2m+3)z+2=0.$$

1°/Donner un repère $(A, \vec{u})$ *de* Δ_a.
2°/Etudier , suivant les valeurs de a et m , la position relative de Δ_a *et* P_m.

3°/Démontrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D dont-on donnera un repère $(B, \vec{v})$.
4°/Déterminer a pour que D et Δ_a soient coplanaires.
Pour la valeur de a trouvée, écrire une équation cartésienne du plan Q contenant D et Δ_a.

EXERCICE N°6

L'espace est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.on donne le point $A_m(m-1,m,m+1)$ où m est un paramètre

réel et la droite D définie par : $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+k \quad (k \in \mathbb{R}). \\ z = 3 \end{cases}$

1°/Quel est l'ensemble Δ des points A_m lorsque m décrit R ?.
2°/Pour quelle valeur de m, a-t-on : $A_m \in D$?
3°/On suppose que $(m \neq 2)$.Ecrire une équation cartésienne du plan P_m passant par A_m et contenant D.
Que remarque-t-on ?

4°/Soit un réel a et la droite D_a définie par : $\begin{cases} x = -1+ab \\ y = 1+(a-1)b \quad (b \in \mathbb{R}). \\ z = 1+ab \end{cases}$

a)Les droites D et D_a peuvent-elles être parallèles .
b)Ecrire une équation cartésienne du plan Q_a contenant D_a et parallèle à D.
c)Montrer que tous les plans Q_a contiennent une droite fixe D' parallèle à D.

EXERCICE N°7

L'espace ξ est rapporté à un repère cartésien $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A tout réel m , on associe le plan Pm dont une équation cartésienne est : $mx + 2y - m^2z + 3 = 0$.

1°)Déterminer les plans Pm passant par le point A(2,0,1).

2°)Déterminer l'intersection des plans P_{-1} et P_1.

3°)Montrer que tous les plan Pm passent par un point fixe B dont on précisera les coordonnées.

4°)Déduire , suivant les valeurs de m , la position relative de (AB) et Pm.

5°)Soit D la droite passant par B et de vecteur directeur : $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

6°)Montrer que les droites (OA) et D ne sont pas coplanaires .

7°)Soit Q le plan contenant la droite (OA) et parallèle à D.

Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

8°)Déterminer m pour que les plans Q et Pm soient parallèles.

EXERCICE N°8

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points : A(2, -3 , -1) , B(1 , 0 , 2) et C(0, 1 , 3)
1°)a)Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
b)Ecrire une équation cartésienne du Plan P passant par les points A , B et C .
2°)Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi,\pi[$, on considère l'ensemble S_t des points M(x,y,z) vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2y\sin t + 2z + t^2 + \sin^2 t - 1 = 0$
Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
3°)a)Etudier, suivant les valeurs de t, l'intersection de la sphère S_t et du plan P .
b)Dans le cas où le plan P est tangent à la sphère S_t, déterminer les cordonnées du point de contact.

EXERCICE N°9

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points : A(1, 2 , -1) et B(2 , 1 , 1) .
1°)Déterminer une équation du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).
2°)Soit P_m le plan d'équation : $x + y + m - 3 = 0$ où m est paramètre réel.
a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m .

b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est-elle incluse dans le plan P_m ?

c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q .

3°)Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m .
Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré .

EXERCICE N°10

Dans L'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(1,-1,2) et B(-1,1,-2).

1°)Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2°)Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) et Q le plan dont une équation cartésien est : $x - y + 2z + 6 = 0$.

a) Donner une équation cartésienne du plan P .

b) Vérifier que le plan Q passe par le point B et est parallèle au plan p .

3°)On considère la sphère (S) tangente en B au plan Q et dont l'intersection avec le plan P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$.

On désigne par I le centre de la sphère (S) et par (a , b , c) les cordonnées de I.

a) Montrer que le point I appartient à la droite (AB).

b) En déduire que : $b = -a$ et $c = 2a$.

c) Montrer que $IB^2 - IA^2 = 12$ et en déduire que : $a - b + 2c = 3$.

d) Déterminer alors les cordonnées du point I et écrire une équation cartésienne de (S)

EXERCICE N°11

Dans l'espace ξ ,,rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1,2,0) ; B(0,1,-1) et C(2,0,-2). Soit D le droite passant par A et vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

1°)Soit $\zeta=\left\{M\in\xi\ /\ MA^2+MB^2=3\right\}$. Montrer que ζ est la sphère de diamètre [AB].

2°)Montrer que D coupe ζ en A et en deuxième point A' dont on précisera les cordonnées.

3°)a)Vérifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b)On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que A est le projeté orthogonal de G sur la droite D.

4°)Soit $\zeta'=\left\{M\in\xi\ /\ MA^2+MB^2+MC^2=9\right\}$

a)Montrer que, pour tout point M de ξ , on a : $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+6$

b)En déduire que ζ' est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

c)Déterminer la position relative de ζ' et D.

d)Vérifier qu'une équation cartésienne de ζ' est : $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$

5°)Soit M un point de ξ.

a)Montrer que : $M\in\zeta\cap\zeta' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

b)En déduire que $\zeta\cap\zeta'$ est un cercle dont on précisera le centre H et le rayon.